G. MARINESCU

SPAȚII VECTORIALE NORMATE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

G. MARINESCU

SPAȚII VECTORIALE NORMATE

1956
EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

PREFAȚĂ

Importanța analizei funcționale printre disciplinele matematice este astăzi binecunoscută. Elementele ei sînt necesare în cultura oricărui matematician sau cercetător în domeniile înrudite. Totuși, pînă în ultimii, ani erau prea puține cărți în literatura matematică universală, în care analiza funcțională să fie expusă în mod sistematic.

Cînd am început redactarea cărții de față — în 1951 — spațiile vectoriale normate nu erau studiate decît parțial, în cartea binecunoscută a lui S. Banach [*5*], *apărută în 1932, și în cartea lui* E. Hille [*13*].

Colectivul de cercetători în domeniul analizei funcționale, din cadrul Academiei R.P.R, a luat — sub conducerea profesorului Al. Ghika *— inițiativa expunerii problemelor importante din acest domeniu sub formă de monografii, care să poată servi în același timp de manuale pentru studenții și aspiranții universităților și institutelor tehnico-științifice.*

Subiectul central al acestor probleme în dezvoltarea actuală îl constituie spațiile vectoriale normate și în special spațiile Banach.

Am căutat să tratăm în această carte toate elementele esențiale din teoria spațiilor vectoriale normate și să dăm cititorului posibilitatea să urmărească orice lucrare din acest domeniu.

Problemele studiate au fost duse pînă la ultimul lor stadiu de dezvoltare corespunzător timpului în care au fost redactate (1951—1952).

Menționăm totuși că unele probleme, care de obicei sînt cercetate în cadrul spațiilor Banach, au fost lăsate la o parte, pentru a fi expuse într-un cadru mai general — al spațiilor vectoriale topologice — sau independent, cum ar fi spațiile Hilbert, care constituie obiectul unui volum scris de C. T. Ionescu Tulcea.

În privința aplicațiilor, nu am putut realiza intenția inițială de a le studia sistematic, ci am dat numai unele exemple, ca ilustrare pentru diferitele capitole de bază.

Pentru completarea informațiilor asupra spațiilor vectoriale normate și aplicațiilor lor, am dat o bibliografie destul de bogată, deși nu toate lucrările enumerate au putut fi consultate pentru scrierea cărții.

Menționăm că de mare folos în alcătuirea cărții ne-au fost articolele expozitorii apărute în revista Uspehi Matematiceskih Nauk.

Autorul mulțumește profesorului Al. Ghika *pentru tot sprijinul acordat în vederea apariției acestei cărți și lui* C. T. Ionescu Tulcea *pentru colaborare.*

CAPITOL INTRODUCTIV

Citirea unei cărți de analiză funcțională presupune cunoașterea noțiunilor generale de teoria mulțimilor, topologie, algebră și de analiză clasică. Expunerea pe larg a acestor noțiuni ar ocupa un spațiu prea dezvoltat și nu poate fi încadrată într-un volum ca acesta de față. De aceea, noi presupunem, în principiu, cunoscute cititorului, cel puțin în măsura în care intervin aici, disciplinele enumerate.

Totuși ne vom strădui să facem citirea acestei cărți cît mai puțin legată de cunoștințe anterioare. Pentru a micșora efortul cititorului și pentru a preciza notațiile și sensul exact al noțiunilor utilizate, dăm în acest capitol, pe scurt, unele definiții și propoziții pe care le considerăm mai importante.

§ 1. Noțiuni de teoria mulțimilor și structurilor

1. Presupunem cunoscute noțiunile de *mulțime*, *submulțime* (*parte*), *incluziune*, *reuniune*, *intersecție*, *complementară*, *parte vidă* etc.

În general, notăm o mulțime și părțile ei cu litere mari. Atunci cînd vrem să precizăm elementele din care este compusă mulțimea, întrebuințăm notații ca $\{x_\iota\}_{\iota\in I}$, I fiind o mulțime de indici, sau $\{ x \mid "P"\}$, înțelegînd prin aceasta mulțimea elementelor x care au proprietatea $"P"$.

Relația de incluziune o însemnăm prin $\subset$; semnul de apartenență este $\in$.

Reuniunea a două părți A, B se notează

$$A \cup B,$$

iar *reuniunea unei familii oarecare* de părți, $\{A_\iota\}_{\iota\in I}$,

$$\bigcup_{\iota\in I} A_\iota,$$

(I fiind mulțimea de indici în corespondență biunivocă cu mulțimea de părți respectivă).

Analog pentru *intersecție* întrebuințăm notațiile

$$A \cap B \text{ și } \bigcap_{i \in I} A_i.$$

În cazul *reuniunii sau intersecției numerabile* se întrebuințează și notațiile

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

sau

$$\bigcup_{i \in N} A_i, \quad \bigcap_{i \in N} A_i,$$

unde N este *mulțimea numerelor naturale.*

Complementara unei mulțimi A se va nota $\complement A$.

Dacă o mulțime este *numerabilă*, adică este de forma $\{x_i\}_{i \in N}$, o numim *șir* și vom scrie în general, $\{x_i\}$ sau $\{x_n\}$, fără altă precizare (atunci cînd nu se poate naște o confuzie).

2. O relație $\sim$ între elementele unei mulțimi E se numește *relație de echivalență* dacă este *reflexivă*, *tranzitivă și simetrică*, adică satisface următoarele condiții:

$$a \sim a;$$
$$a \sim b,\ b \sim c \text{ implică } a \sim c;$$
$$a \sim b \text{ implică } b \sim a.$$

Relația de echivalență împarte mulțimea E în părți disjuncte două cîte două, numite *clase de echivalență*, toate elementele aparținînd unei clase de echivalență fiind echivalente între ele.

Mulțimea claselor de echivalență determinate de o relație de echivalență se numește *mulțime cît.*

3. Prin *structură* înțelegem, o organizare axiomatică a unei mulțimi abstracte.

Două mulțimi înzestrate cu aceeași structură se numesc *izomorfe* (față de această structură) dacă există între ele o corespondență biunivocă, așa fel ca elementele care definesc structura în prima mulțime să fie în corespondență biunivocă cu elementele care definesc structura în a doua mulțime.

Exemple de structuri sînt: structurile algebrice, topologice, de ordonare și combinațiile între ele.

De obicei, pentru o mulțime înzestrată cu o structură, întrebuințăm denumirea de *spațiu.*

4. *Produs cartezian* a două mulțimi E și F, se numește mulțimea perechilor (x, y) unde $x \in E$ și $y \in F$.

Definiţia se extinde uşor la un număr finit sau la o familie oarecare de mulţimi.

Produsul cartezian al mulţimilor E şi F se va nota $E \times F$.

§ 2. Mulţimi ordonate. Teorema lui Zorn

1. Mulţimea E se numeşte *ordonată* (sau *parţial ordonată*) de relaţia $<$ dacă este verificată condiţia

$$x < y,\ y < z \ \textit{implică}\ x < z \quad (x,\ y,\ z \in E).$$

Dacă în plus este verificată şi condiţia

$$x < y,\ y < x \ \textit{implică}\ x = y$$

relaţia de ordonare se numeşte *proprie*.

Vom întrebuinţa şi notaţia $y > x$ pentru $x < y$.

În locul semnului $<$ vom pune de multe ori semnul $\leqslant$.

Dacă este exclusă relaţia $x < x$, relaţia de ordonare se numeşte *strictă* şi se notează de obicei cu $<$.

O parte A a unei mulţimi ordonate se numeşte *total ordonată*, dacă pentru orice pereche de elemente $x,\ y \in A$, este valabilă cel puţin una din relaţiile

$$x < y \text{ sau } x > y.$$

2. Fie E o mulţime ordonată şi $A \subset E$.

Spunem că elementul $a \in E$ este o majorantă pentru mulţimea A, dacă pentru orice $x \in A$ avem $x < a$.

Cea mai mică majorantă (dacă există) a mulţimii A se numeşte margine superioară.

O mulţime ordonată în care pentru orice parte total ordonată există o margine superioară, se numeşte *inductiv ordonată*.

Elementul a al unei mulţimi ordonate E se numeşte *maximal*, dacă pentru orice $x \in E$, relaţia $a < x$ implică $a = x$.

Teorema lui Zorn. *Dacă în mulţimea ordonată E orice parte total ordonată are o majorantă, atunci pentru orice element $x \in E$ există un element maximal a astfel încît $x < a$.*

§ 3. Structuri algebrice şi topologice

1. *Structurile algebrice* sînt definite de *legi de compoziţie* între elementele unei mulţimi, numite *legi interne*, şi legi de compoziţie cu elementele altor mulţimi, numite *legi externe*.

Structura algebrică, esenţială pentru obiectul acestei cărţi, este aceea de *spaţiu vectorial*, sau *liniar*, pe care îl vom defini axiomatic.

Presupunem cunoscute *corpurile numerelor reale şi complexe*.

2. *Structurile topologice* se definesc, în modul cel mai general, printr-o familie de părţi, numite *mulţimi deschise*, satisfăcînd următoarele condiţii:

1) *orice reuniune de mulţimi deschise este o mulţime deschisă*;

2) *orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.*

O definiție echivalentă se poate da cu ajutorul *vecinătăților.*

Plecînd de la mulțimi deschise, prin *vecinătate a unui punct* x se înțelege orice mulțime care include o mulțime deschisă căreia îi aparține x.

O categorie specială de spații topologice o constituie *spațiile metrice*, definite cu ajutorul unei *distanțe.*

Spunem că în mulțimea E este definită o distanță, sau că E este un spațiu metric, dacă pentru orice pereche de elemente $x, y \in E$ există un număr real unic, $d(x, y)$, care satisface următoarele condiții:

(D_1). $d(x, y) \geqslant 0$, $d(x, y) = 0$ *este echivalent cu* $x = y$;

(D_2). $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$, *pentru orice* $x, y, z \in E$.

3. Structurile algebrico-topologice sînt, așa cum le arată numele, în același timp structuri algebrice și topologice. În general între structura algebrică și structura topologică a aceleiași mulțimi există anumite legături, numite relații de compatibilitate.

Spațiile vectoriale normate constituie un exemplu foarte important de structură algebrico-topologică.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Bibliografia necesară pentru asimilarea noțiunilor expuse succint în acest capitol și pentru completarea lor, este redată separat, sub titlul „Cărți de analiză funcțională și disciplinele înrudite".

Elementele de teoria mulțimilor, cu o discuție pe larg a structurilor topologice, se pot studia din cărțile lui P.S. Alexandrov [2], [3] și P. S. Alexandrov și K. Hopf [4]. În [2] și [4] sînt studiate structurile topologice generale și în special topologia combinatorie; [3] este un manual cu caracter didactic, în care sînt expuse noțiunile de teoria mulțimilor și funcțiilor, atenția fiind îndreptată către fundamentele analizei clasice.

Structurile topologice mai pot fi studiate și din volumele de topologie ale tratatului general [8], sau din [5]. Noțiunile de teoria mulțimilor fără considerații asupra structurilor pot fi studiate și din cartea recentă a lui W. Sierpinski [25].

O teorie unitară a structurilor se găsește în volumul de teoria mulțimilor al tratatului [8]. Din acest volum nu a apărut decît rezumatul (*Fascicule des résultats*).

Spațiile metrice sînt studiate, în vederea analizei funcționale, în L. A. Liusternic și V. I. Sobolev [17].

2. Mulțimile ordonate intervin în cartea de față sub două aspecte. Primul aspect este cel din acest capitol introductiv, în legătură cu teorema lui Zorn, care are aplicații în toate domeniile matematicilor. Această teoremă este folosită acum în toate teoremele de existență, a căror demonstrație cerea mai înainte o bună ordonare a mulțimilor sau un raționament prin inducție transfinită.

O demonstrație a teoremei lui Zorn, fără folosirea teoremei bunei ordonări, a fost dată de F. Obreanu [217].

Al doilea aspect sub care intervin mulțimile parțial ordonate apare în capitolul I, unde sînt studiate spații vectoriale normate care au în același timp și o structură de mulțime ordonată cu diferite particularități.

Un studiu general al mulțimilor ordonate și al aplicațiilor lor în diferite ramuri de matematică se găsește în cartea lui G. Birkhoff [6].

În analiza funcțională, mulțimile ordonate au fost amplu folosite de cercetătorii sovietici; în această privință vom reveni cu lămuriri și referințe la capitolele respective, deocamdată trimitem la cartea [14], de L. V. Kantorovici, B. Z. Vulih și A. G. Pinsker.

3. Structurile algebrice apar în cartea de față combinate cu structuri topologice și de ordonare.

Definițiile lor sînt date în capitolele următoare, astfel încît nu cer nici o introducere specială.

Pentru inițiere în studiul modern al algebrei, recomandăm cursul lui A. G. Kuroș [16], iar pentru algebra specifică spațiilor vectoriale cărțile lui A. I. Malțev [18] și I. M. Ghelfand. [9].

4. Notațiile și nomenclatura sînt, în general, conforme celor din tratatul [8], în care pentru prima dată se încearcă a le uniformiza în toate ramurile de matematică. Sînt însă anumiți termeni cărora nu le-am putut găsi corespondent convenabil în limba romînă; pentru astfel de termeni am preferat denumirea cea mai întrebuințată. De exemplu, în locul cuvîntului „boule" noi preferăm cuvîntul „sferă" clasic în topologie și în analiza funcțională, deși în geometrie prin sferă se înțelege, într-un spațiu cu trei dimensiuni, suprafața sferică și nu sfera plină deschisă, așa cum se înțelege în topologie.

CAPITOLUL I

SPAȚII VECTORIALE NORMATE ȘI SPAȚII BANACH

În acest capitol definim categoriile de spații care constituie obiectul acestei cărți și studiem proprietățile generale ale lor.

Noțiunile cele mai importante, în jurul cărora sînt grupate toate celelalte, sînt acelea de spațiu vectorial normat și spațiu Banach.

§ 1. Spații vectoriale

1. Notăm, în general, prin K un corp, care este sau corpul numerelor reale, notat cu R, sau corpul numerelor complexe, notat cu C.

Definiția 1. *O mulțime E se numește spațiu vectorial sau spațiu liniar, față de corpul K, dacă îndeplinește următoarele condiții:*

I. *E este un grup comutativ față de o operație pe care o notăm cu $+$.*

Aceasta înseamnă că fiecărei perechi de elemente $x, y \in E$ îi corespunde un element $x + y \in E$, astfel încît:

I_1. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

I_2. *există un element $0 \in E$ pentru care*

$0 + x = x + 0 = x$ *oricare ar fi $x \in E$;*

I_3. *pentru orice $x \in E$ există un element $-x \in E$ astfel încît*

$$x + (-x) = (-x) + x = 0;$$

I_4. $x + y = y + x$.

II. *Pentru orice $x \in E$ și $a \in K$ este definit un element $ax \in E$, astfel încît:*

II_1. $a(x + y) = ax + ay$, $(a \in K;\ x, y \in E)$;

II_2. $(a + b)x = ax + bx$, $(a, b \in K;\ x \in E)$;

II_3. $a(bx) = (ab)x$, $(a, b \in K;\ x \in E)$;

II_4. $1x = x$.

Corpul K se mai numește și *corpul scalarilor*, iar operația $(a, x) \to ax$, *înmulțirea cu scalari.*

În cazul cînd corpul K se confundă cu R, spațiul vectorial E se numește *real*, iar dacă se confundă cu C, spațiul E se numește *complex.* Atunci cînd se spune *spațiu vectorial* sau *spațiu liniar*, se înțelege că este real sau complex.

Cel mai simplu exemplu de spațiu vectorial real este însuși corpul R al numerelor reale, iar cel mai simplu exemplu de spațiu vectorial

complex este mulțimea C a numerelor complexe. Mulțimea C a numerelor complexe este însă și un spațiu vectorial real.

2. Elementul $(-1)\,x$ se notează cu $-x$ și suma $x+(-1)\,y=x+(-y)=x-y$.

Dacă A și B sînt două submulțimi ale spațiului E, $A+B$ este mulțimea tuturor elementelor de forma $x+y$ cu $x\in A$ și $y\in B$, iar $A-B$ este mulțimea tuturor elementelor de forma $x-y$ cu $x\in A$ și $y\in B$.

Dacă x este un element din E iar A o submulțime din E, $x+A$ este mulțimea tuturor elementelor de forma $x+y$ cu $y\in A$.

De asemenea, dacă $a\in K$ și $A\subset E$, atunci aA este mulțimea elementelor de forma ax cu $x\in A$.

Se vede că întrebuințăm aceeași notație pentru elementul 0 al corpului K și pentru elementul 0 al spațiului E. Atunci cînd s-ar putea naște o confuzie, vom preciza de care element este vorba.

3. Următoarele proprietăți sînt consecințe imediate ale condițiilor I și II:

a) $0x=0$ *pentru orice* $x\in E$ (aici primul 0 aparține corpului K, iar celălalt spațiului E);

b) $ax=0$ și $a\neq 0$ *implică* $x=0$;

c) $ax=0$ și $x\neq 0$ *implică* $a=0$.

4. Izomorfismul spațiilor vectoriale este dat de

D e f i n i ț i a 2. *Spunem că două spații vectoriale E și E_1 sînt izomorfe (din punct de vedere algebric) dacă între ele există o corespondență biunivocă.*

$$f: E\to E_1$$

care păstrează structura algebrică, adică

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(ax)=af(x).$$

Se știe din algebră că și funcția reciprocă f^{-1} are aceleași proprietăți.

5. Printre submulțimile unui spațiu vectorial ies în evidență subspațiile vectoriale

D e f i n i ț i a 3. *O submulțime G a unui spațiu vectorial E se numește subspațiu vectorial (sau liniar) dacă sînt verificate relațiile*

$$x,\ y\in G \text{ implică } x+y\in G, \tag{1}$$

$$a\in K,\ x\in G \text{ implică } ax\in G. \tag{2}$$

Cu notațiile adoptate la punctul 2, aceste relații se mai pot scrie

$$G+G\subset G, \tag{1'}$$

$$a\in K \text{ implică } aG\subset G. \tag{2'}$$

Următoarele propoziții asupra subspațiilor unui spațiu vectorial se deduc imediat din definiția 3.

P r o p o z i ț i a 1. *Intersecția unei mulțimi oarecare de subspații vectoriale ale spațiului vectorial E este un subspațiu vectorial al lui E.*

Demonstrație. Fie $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ o familie oarecare de subspații. Atunci

$$x \in G_\iota \text{ și } y \in G_\iota \text{ pentru orice } \iota \in I$$

implică

$$x + y \in G_\iota \text{ pentru orice } \iota \in I$$

și

$$ax \in G_\iota \text{ pentru orice } \iota \in I \text{ și } a \in K.$$

Propoziția 2. *Reuniunea unei mulțimi total ordonate, prin relația de incluziune, de subspații vectoriale ale spațiului vectorial E este un subspațiu vectorial al lui E.*

Demonstrație. Fie $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ o mulțime de subspații astfel încît $\alpha, \beta \in I$ implică cel puțin una din relațiile

$$G_\alpha \subset G_\beta \text{ sau } G_\beta \subset G_\alpha.$$

Atunci, dacă $x \in G_\alpha$ și $y \in G_\beta$ vom avea cel puțin una din relațiile

$$x \in G_\beta \text{ sau } y \in G_\alpha.$$

ceea ce atrage, respectiv,

$$x + y \in G_\beta \text{ sau } x + y \in G_\alpha.$$

deci, în orice caz,

$$x + y \in \bigcup_{\iota \in I} G_\iota.$$

De asemenea $x \in G_{\iota_0}$ implică $ax \in G_{\iota_0}$.

Propoziția 3. *Mulțimea subspațiilor vectoriale ale unui spațiu vectorial E, ordonată prin relația de incluziune din E, este ordonată inductiv.*

Definiția 4. *Fie M o submulțime oarecare a spațiului vectorial E. Numim acoperire liniară a mulțimii M și notăm prin $L(M)$ intersecția tuturor subspațiilor vectoriale ale lui E care includ mulțimea M.*

Acoperirea liniară este bine definită, datorită propoziției 1 și are următoarele proprietăți:

Propoziția 4. *Acoperirea liniară a mulțimii vide este mulțimea formată numai din elementul 0.*

$$L(\emptyset) = \{0\}.$$

Propoziția 5. *Fie M o submulțime nevidă a spațiului vectorial E. Atunci $x \in L(M)$ dacă și numai dacă există un număr finit de elemente $x_i \in M$ și de numere $a_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$, astfel încît*

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{3}$$

Demonstrație. Mulțimea elementelor de forma (3) constituie, evident, un subspațiu vectorial care include mulțimea M. De altă parte, orice subspațiu vectorial care include mulțimea M, include și mulțimea elementelor de forma (3).

Propoziția 6. *Dacă M este o submulțime oarecare din E, atunci*

$$L(L(M)) = L(M).$$

Propoziția 7. *Dacă A și B sînt două submulțimi în E, atunci*

$$L(A + B) = L(A) + L(B), \tag{4}$$

$$A \subset B \text{ implică } L(A) \subset L(B). \tag{5}$$

Acoperirea liniară a mulțimii M se mai numește și *subspațiul vectorial generat de* M.

6. Noțiunea de independență liniară se poate introduce fără considerarea dimensiunii

Definiția 5. *Fie E un spațiu vectorial și M o submulțime a sa. Mulțimea M se numește liniar independentă dacă relațiile*

$$M_1 \subset M \text{ și } L(M_1) = L(M)$$

implică

$$M_1 = M.$$

Dacă mulțimea M este liniar independentă, se mai spune că elementele care compun mulțimea M sînt liniar independente.

Propoziția 8. *Condiția necesară și suficientă pentru ca mulțimea nevidă $M \subset E$ să fie liniar independentă este următoarea:*

$$a_i \in K, \quad x_i \in M, \quad x_i \neq x_j \text{ pentru } i \neq j$$

$$(i, j = 1, \ldots, n) \text{ și } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

implică

$$a_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Definiția 6. *Mulțimea $M \subset E$ se numește o bază algebrică a spațiului vectorial E dacă M este liniar independentă și $L(M) = E$. Dacă există o bază algebrică finită a spațiului E, se spune că E are un număr finit de dimensiuni.*

Teoremă. *Fie A o submulțime liniar independentă a spațiului vectorial E. Există o bază algebrică M a spațiului E, astfel că $A \subset M$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{A}$ mulțimea părților spațiului E, care includ mulțimea A. Vom arăta acum că mulțimea $\mathcal{A}$ este ordonată inductiv de relația de incluziune din E.

Fie $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ o submulțime total ordonată din $\mathcal{A}$. Mulțimea

$$A_1 = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$$

este o margine superioară pentru mulțimile A_ι ($\iota \in I$). Într-adevăr, dacă mulțimea indicilor I este finită, mulțimea A_1 coincide cu una din mulțimile A_ι, deci este liniar independentă. În cazul general, cînd mulțimea I este infinită, orice mulțime finită de elemente $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ inclusă în A_1 este inclusă cel puțin în una din mulțimile A_ι, deci

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

implică $a_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) astfel că este verificată condiția propoziției 8, deci A_1 este liniar independentă.

Mulțimea $\mathcal{A}$, fiind ordonată inductiv, conține un element maximal M. Dacă presupunem că $L(M) \neq E$, există un element $x_0 \in M$ care nu

este combinație liniară de elemente din M. Atunci însă mulțimea $\{x_0\} \cup M$ este liniar independentă, deci M nu este maximală în mulțimea $\mathcal{A}$.

Am arătat astfel că $L(M) = E$ și teorema este demonstrată.

7. Un subspațiu vectorial G al unui spațiu vectorial E definește în E următoarea relație de echivalență :

x este echivalent cu y dacă și numai dacă $x - y \in G$.

Mulțimea claselor de echivalență definite de această relație se organizează în mod natural ca un spațiu vectorial, a cărui structură algebrică este compatibilă cu structura spațiului E.

Această construcție este echivalentă cu următoarea :

Fie E un spațiu vectorial și G un subspațiu vectorial al său. Fiecărui element $x \in E$ îi atașăm mulțimea $x + G$, pe care o vom nota $\dot{x}$; mulțimea elementelor $\dot{x}$ o notăm cu E/G. În E/G introducem următoarea structură algebrică

$$\dot{x} + \dot{y} = x + y + G\,,$$

$$a\dot{x} = ax + G.$$

Se poate verifica ușor că spațiul E/G cu această structură este un spațiu vectorial.

Definiția 7. *Spațiul vectorial E/G astfel construit se numește spațiul cît al spațiul E relativ la subspațiul G.*

8. Un rol important în teoria spațiilor vectoriale îl joacă noțiunea de mulțime convexă.

Definiția 8. *Fie E un spațiu vectorial. O submulțime Q a lui E se numește convexă dacă $x \in Q$, $y \in Q$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ (a real) implică $ax + (1 - a)\,y \in Q$.*

Propoziția 9. *Orice intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă.*

Propoziția 10. *Reuniunea unei mulțimi total ordonate, prin relația de incluziune din E, de mulțimi convexe este o mulțime convexă.*

Propoziția 11. *Mulțimea părților convexe ale unui spațiu vectorial E, ordonată prin relația de incluziune din E, este ordonată inductiv.*

Propoziția 12. *Dacă A și B sînt două submulțimi convexe ale spațiului vectorial E, atunci submulțimea $A + B$ este convexă.*

De asemenea, dacă Q este convexă și $b \in K$, atunci bQ este convexă.

§ 2. Spații vectoriale normate

1. În spațiile vectoriale se pot introduce structuri topologice în modul cel mai general, prin vecinătăți sau prin mulțimi deschise supuse numai la condiția ca structura topologică astfel introdusă să fie compatibilă cu structura algebrică de spațiu vectorial.

Noi vom introduce aici o topologie destul de particulară, cu ajutorul unei funcții cu valori reale. Motivul pentru care este studiată în special această structură îl constituie rezultatele importante la care s-a ajuns cu ajutorul ei.

Definiția 1. *Un spațiu vectorial E se spune că este normat dacă fiecărui element $x \in E$ îi corespunde un număr real $\|x\|$, numit norma elementului x și care satisface următoarele condiții :*

III_1. $\|x\| \geqslant 0$, iar $\|x\| = 0$ implică $x = 0$, $(x \in E)$;

III_2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $(x, y \in E)$;

III_3. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$, $(a \in K;\ x \in E)$.

Observație. Condiția III_3 ne dă $\|0\| = 0$, deci $\|x\| = 0$ este echivalent cu $x = 0$.

Definiția 2. *Fie E un spațiu vectorial normat. Definim distanța între elementele x, $y \in E$, prin expresia*

$$IV. \qquad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Pentru a justifica această definiție, demonstrăm

Teorema 1. *Un spațiu vectorial normat E, în care este definită distanța prin expresia IV, este un spațiu metric.*

Demonstrație. Verificăm condițiile (D_1), (D_2).

(D_1). *a)* $d(x, y) = 0$ înseamnă $\|x - y\| = 0$, deci din III_1, $x - y = 0$, $x = y$;

b) Invers, dacă $x = y$, avem $\|x - y\| = 0$.

(D_2). $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leqslant$

$$\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

2. *Topologia spațiilor vectoriale normate* este aceea de spațiu metric, dată de distanța definită de expresia IV.

Precizăm cîteva definiții și notații și cu această ocazie, reamintim unele noțiuni și rezultate cunoscute din topologia generală sau chiar din analiza clasică.

Numim *sferă de rază r și de centru $x_0 \in E$* mulțimea elementelor $x \in E$ pentru care

$$\|x - x_0\| < r, \qquad (r \text{ număr real pozitiv}).$$

Vom nota această sferă prin $S(x_0; r)$.

Vom întrebuința cîteodată denumirea de *sferă unitate* a spațiului E, pentru sfera $S(0; 1)$.

O mulțime $A \subset E$ se numește *mulțime deschisă* dacă $x \in A$ implică existența unui număr real $r > 0$, astfel că $S(x; r) \subset A$.

O mulțime se numește *închisă* dacă este complementara unei mulțimi deschise.

Reuniunea unei mulțimi oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă; intersecția unei mulțimi oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Intersecția tuturor mulțimilor închise care includ mulțimea $A \subset E$ se numește *închiderea* mulțimii A și se notează $\bar{A}$.

Reuniunea tuturor mulțimilor deschise incluse în A se numește *interiorul* mulțimii A și se notează $\operatorname{int} A$.

O mulțime $A \subset E$ se numește *rară* dacă interiorul închiderii ei este vid :

$$\operatorname{int} \bar{A} = \theta.$$

Orice reuniune numerabilă de mulțimi rare se numește *mulțime slabă* sau *de prima categorie*. Orice mulțime care nu este slabă se numește și *de a doua categorie*.

Mulțimea M are *proprietatea lui Baire* dacă există o mulțime deschisă $G \subset E$ astfel încît mulțimile $G \cap \complement M$ și $M \cap \complement G$ să fie slabe.

O mulțime A se numește *compactă* în E, dacă orice familie de mulțimi deschise $\{ D_\iota \}_{\iota \in I}$ astfel încît $A \subset \bigcup_{\iota \in I} D_\iota$ conține o subfamilie finită $\{ D_i \}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, astfel ca $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

O mulțime a cărei închidere este *compactă* se numește *relativ compactă*.

3. *Convergența șirurilor* se definește ca în spațiile metrice, ținînd seama de expresia distanței.

Definiția 3. *Fie* $\{ x_n \}_{n=1,2,\ldots}$ *un șir de elemente din spațiul vectorial normat* E. *Spunem că elementul* $x \in E$ *este limita șirului* $\{ x_n \}$, *sau că* x_n *tinde către* x *cînd* n *tinde către infinit, dacă*

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0.$$

În acest caz se scrie

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

sau

$$x_n \to x \quad \text{cînd} \quad n \to \infty.$$

Acest fel de convergență, numită și *convergența în normă*, nu este singurul care se întrebuințează în spațiile vectoriale normate, însă, de obicei, cînd se spune că un șir este convergent, este vorba de definiția dată aici.

Atunci cînd vom întrebuința și altă noțiune de convergență, corespunzătoare altei topologii, o vom specifica.

Considerăm cunoscute, din topologia generală, următoarele propoziții:

Pentru ca o mulțime A *să fie închisă, este necesar și suficient să conțină limita oricărui șir de elemente inclus în* A.

Pentru ca o mulțime $A \subset E$ *să fie relativ compactă, este suficient ca din orice șir inclus în* A *să se poată extrage un șir convergent către un element din* E.

Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție f definită pe E și cu valori într-un spațiu topologic să fie continuă în punctul $x \in E$ este ca pentru orice șir $\{ x_n \} \subset E$ convergent către x să avem

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x).$$

4. Din definițiile de mai sus rezultă următoarele proprietăți ale normei:

Propoziția 1. *Norma, considerată ca o funcție definită pe spațiul vectorial cu structura topologică descrisă mai sus (indusă de normă), este o funcție continuă.*

Demonstrație. Fie $\{ x_n \} \subset E$ un șir convergent către elementul $x \in E$. Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \| x \|.$$

Din condiția III_2 deducem

$$\|x_n\| = \|x_n - x + x\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|,$$

deci

$$\|x_n\| - \|x\| \leqslant \|x_n - x\|$$

și în mod analog

$$\|x\| - \|x_n\| \leqslant \|x_n - x\|,$$

de unde rezultă

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\|.$$

Din această inegalitate rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

implică

$$\lim_{n\to\infty} (\|x_n\| - \|x\|) = 0$$

și propoziția este demonstrată.

P r o p o z i ț i a 2. *Fie* $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset E$, $\{a_n\} \subset K$, $\{b_n\} \subset K$. *Relațiile*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \in E$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in K, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \in K$$

implică

$$\lim_{n\to\infty} (a_n x_n + b_n y_n) = ax + by.$$

D e m o n s t r a ț i e. Rezultă din inegalitățile

$$\|a_n x_n + b_n y_n - (ax + by)\| \leqslant \|a_n x_n - ax\| + \|b_n y_n - by\| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_n (x_n - x) + (a_n - a)\, x\| + \|b_n (y_n - y) + (b_n - b)\, y\| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n|\, \|x_n - x\| + |a_n - a|\, \|x\| + |b_n|\, \|y_n - y\| + |b_n - b|\, \|y\|.$$

Este evident că în condițiile date,

$$\lim_{n\to\infty} \|a_n x_n + b_n y_n - (ax + by)\| = 0,$$

deci într-adevăr

$$\lim_{n\to\infty} (a_n x_n + b_n y_n) = ax + by.$$

5. În legătură cu convergența șirurilor, putem introduce noțiunea de serie.

D e f i n i ț i a 4. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir de elemente din spațiul vectorial normat* E *și*

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dacă există în E elementul

$$x = \lim_{n \to \infty} s_n$$

spunem că acest element este suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

și că această serie este convergentă.

6. Consecvenți cu terminologia adoptată în introducere, întrebuințăm noțiunea de izomorfism în sensul unei transformări biunivoce, care conservă o anumită structură. În teoria spațiilor vectoriale normate intervin două feluri de izomorfisme (exceptînd izomorfismul algebric) pe care este bine să le delimităm precis.

Definiția 5. *Spunem că două spații vectoriale normate sînt izomorfe din punct de vedere algebric și topologic, dacă sînt algebric izomorfe și izomorfismul algebric este în același timp un homeomorfism.*

Se mai spune în acest caz că cele două spații sînt *echivalente.*

Definiția 6. *Două spații vectoriale normate E și E_1 sînt izomorfe din punct de vedere algebric și din punctul de vedere al normei, dacă există între ele un izomorfism algebric f care păstrează și norma, adică astfel ca*

$$\| f(x) \|_{E_1} = \| x \|_E, \quad \textit{pentru orice} \quad x \in E.$$

În acest caz se mai spune că f este o *izometrie*, deoarece conservarea normei este echivalentă cu conservarea metricei.

Este evident că două spații vectoriale normate izomorfe din punct de vedere algebric și al normei sînt și homeomorfe, însă nu și invers : două spații vectoriale normate pot fi izomorfe din punct de vedere algebric și topologic, fără ca normele să fie conservate prin acest izomorfism. De exemplu, în același spațiu vectorial E pot exista două norme $\| x \|^{(1)}$ și $\| x \|^{(2)}$ diferite, care induc în E aceeași topologie.

Definiția 7. *Dacă spațiul vectorial E are aceeași topologie față de norma $\| x \|^{(1)}$ și față de norma $\| x \|^{(2)}$ spunem că aceste norme sînt topologic echivalente.*

În capitolul II sînt date criterii pentru ca două norme definite pe același spațiu vectorial să fie topologic echivalente și pentru ca două spații vectoriale normate, algebric izomorfe să fie și topologic izomorfe.

7. Vom stabili acum unele proprietăți ale submulțimilor unui spațiu vectorial normat E.

Propoziția 3. *Dacă mulțimea Q este convexă, atunci și închiderea ei $\overline{Q}$ este convexă.*

Demonstrație. Dacă $x \in \overline{Q}$ și $y \in \overline{Q}$, există două șiruri $\{ x_n \}$ și $\{ y_n \}$ incluse în Q, astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{și} \quad \lim_{n \to \infty} y_n = y,$$

de unde deducem

$$\lim_{n \to \infty} (a x_n + (1 - a) y_n) = a x + (1 - a) y.$$

Deoarece pentru $0 \leqslant a \leqslant 1$, șirul $\{ax_n + (1-a)y_n\}$ este inclus în Q, rezultă că elementul $ax + (1-a)y$ aparține mulțimii $\overline{Q}$.

Propoziția 4. *Transformarea $x \to x + x_0$ a unui spațiu vectorial normat E pe el însuși este un homeomorfism.*

Demonstrație. Fie $y = x + x_0$ și $S(y; r)$ mulțimea punctelor z pentru care $\|z - y\| < r$. Sfera $S(x; r)$ se transformă prin translația dată în $S(y; r)$ pentru că din relația

$$\|z' - x\| < r$$

deducem

$$\|z' + x_0 - y\| = \|z' \overset{a}{-} x\| < r.$$

Rezultă că transformarea dată este continuă. Cum același lucru este evident și pentru transformarea reciprocă $x = y - x_0$, propoziția este demonstrată.

Propoziția 5. *Dacă mulțimea A este deschisă, atunci $A + x_0$ este o mulțime deschisă pentru orice $x_0 \in E$.*

Demonstrație. Rezultă imediat din propoziția precedentă, deoarece un homeomorfism transformă o mulțime deschisă într-o mulțime deschisă.

Propoziția 6. *Dacă mulțimea A este deschisă și M o mulțime oarecare, atunci $A + M$ este o mulțime deschisă.*

Demonstrație. Mulțimea $A + M$ este reuniune de mulțimi deschise

$$A + M = \bigcup_{x \in M} (A + x).$$

Propoziția 7. *Transformarea $x \to ax$ este un homeomorfism al spațiului E pentru orice $a \in K$, $a \neq 0$.*

Propoziția 8. *Dacă spațiul vectorial normat E este neslab, atunci orice submulțime deschisă nevidă este neslabă.*

Demonstrație. Presupunem că mulțimea $A \neq \emptyset$ este deschisă și slabă. Fie $x_0 \in A$ și $A_1 = -x_0 + A$, $A_n = nA_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Mulțimile A_n sînt deschise și slabe, pentru că transformările $x \to x - x_0$ și $x \to nx$ sînt homeomorfisme. Deoarece $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, E este slab, contrar ipotezei.

Propoziția 9. *Fie E un spațiu vectorial normat și $A \subset E$ o mulțime cu proprietatea lui Baire, neslabă.*

Atunci mulțimea $A - A$ este o vecinătate a elementului 0.

Demonstrație. Din definiția mulțimilor având proprietatea lui Baire, rezultă că există o mulțime deschisă $G \subset E$, astfel că mulțimile $G \cap \complement A$ și $A \cap \complement G$ sînt slabe.

Deoarece A este neslabă, $G \neq \emptyset$.

Există deci un element $x_0 \in G$ și $\varepsilon > 0$, astfel că sfera $S(x_0; \varepsilon) \subset G$. Vom arăta că sfera $S(0; \varepsilon)$ este inclusă în $A - A$.

Fie $z \in S(0; \varepsilon)$, adică $\|z\| < \varepsilon$. Notăm $A_1 = z + A$, $G_1 = z + G$.

Atunci $x_0 + z \in S(x_0; \varepsilon) \subset G$ și de altă parte $x_0 + z \in G_1$, deci $G \cap G_1 \neq \emptyset$.

Deoarece

$$G \cap G_1 \subset (A \cap A_1) \cup (G \cap \complement A) \cup (G_1 \cap \complement A_1) \text{ și } G \cap \complement A,\ G_1 \cap \complement A_1$$

sînt slabe, iar $G \cap G_1$ este neslabă (propoziția 8), rezultă că $A \cap A_1 \neq \emptyset$.

Există deci $x \in A$, $x \in z + A$, de unde $x = z + y$ cu $y \in A$ și prin urmare $z = x - y \in A - A$.

Propoziția este demonstrată.

P r o p o z i ț i a 10. *Orice subspațiu vectorial neslab al spațiului vectorial normat E coincide cu E.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie E_1 un astfel de subspațiu. Din propoziția 9 rezultă că $E_1 = E_1 - E_1$ conține o vecinătate a elementului 0. Atunci

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nE_1 = E_1.$$

T e o r e m a 2. *Fie E un spațiu vectorial normat, E_1 un subspațiu vectorial închis și un element x_0 aparținînd complementarei lui E_1. Atunci există în E_1 un element x_1 astfel încît*

$$\| x_0 - x_1 \| \leqslant 2 \| x_0 - x \|$$

pentru orice element $x \in E_1$.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă x_0 nu aparține subspațiului E_1, atunci

$$\inf_{x \in E_1} \| x_0 - x \| = d > 0.$$

Alegem elementul $x_1 \in E_1$ astfel ca

$$\| x_0 - x_1 \| \leqslant 2d.$$

Atunci pentru orice $x \in E_1$,

$$\| x - x_0 \| \geqslant d \geqslant \frac{1}{2} \| x_0 - x_1 \|.$$

T e o r e m a 3. *Fie E un spațiu vectorial normat, E_1 o submulțime vectorială și $E_2 \subset E_1$ un subspațiu vectorial închis. Dacă E_2 nu coincide cu E_1, există în E_1 un element x_1, astfel încît*

$$\| x_1 \| = 1 \quad \text{și} \quad \| x_1 - x \| \geqslant \frac{1}{2} \quad \textit{pentru orice} \quad x \in E_2.$$

D e m o n s t r a ț i e. Prin ipoteză există în E_1 un element x_0, care nu aparține lui E_2. Teorema precedentă ne asigură existența unui element $x_2 \in E_2$ astfel încît

$$\frac{\| x_0 - x \|}{\| x_0 - x_2 \|} \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{pentru orice} \quad x \in E_2.$$

Fie

$$x_1 = \frac{x_0 - x_2}{\| x_0 - x_2 \|}.$$

Avem

$$\|x_1\| = 1 \quad \text{și} \quad x_1 \in E_1.$$

De altă parte, pentru orice $x \in E_2$

$$\|x_1 - x\| = \left\| \frac{x_0 - x_2}{\|x_0 - x_2\|} - x \right\| = \left\| \frac{x_0 - x_2 - \|x_0 - x_2\| x}{\|x_0 - x_2\|} \right\| = \frac{\|x_0 - x_3\|}{\|x_0 - x_2\|},$$

unde $x_3 \in E_2$.

Atunci

$$\|x_1 - x\| = \frac{\|x_0 - x_3\|}{\|x_0 - x_2\|} \geqslant \frac{1}{2}$$

și teorema este demonstrată.

8. Deoarece vom întîlni și noțiunea de sferă închisă, este necesar să stabilim cîteva proprietăți și să dăm unele precizări.

Definiția 8. *Numim sferă închisă de rază $r > 0$ și centru x mulțimea punctelor y care verifică inegalitatea*

$$\|y - x\| \leqslant r.$$

Păstrăm, așa cum am mai arătat, denumirea de sferă de rază r și centru x pentru sfera deschisă $S(x; r)$, adică mulțimea punctelor y pentru care

$$\|y - x\| < r.$$

Evident că sfera (deschisă) $S(x; r)$ este inclusă în sfera închisă cu același centru și aceeași rază. Mai mult, avem următoarea proprietate, care se știe că nu este valabilă în orice spațiu metric.

Propoziția 11. *Închiderea sferei (deschise) $S(x; r)$ este sfera închisă cu același centru și aceeași rază.*

Demonstrație. Fie S_1 sfera închisă de centru x și rază r și $y \in S_1$, $\|y - x\| = r$. Dacă șirul de numere reale pozitive $\{\varepsilon_n\}$ tinde către 0, șirul $\{\varepsilon_n x + (1 - \varepsilon_n) y\}$ tinde către y. Însă punctele $\varepsilon_n x + (1 - \varepsilon_n) y$ sînt, pentru $0 < \varepsilon_n < 1$, incluse în sfera deschisă $S(x_0; r)$, pentru că

$$\|\varepsilon_n x + (1 - \varepsilon_n) y - x\| = \|(1 - \varepsilon_n)(y - x)\| < \|y - x\| = r.$$

Deci y aparține închiderii sferei deschise.

Invers, dacă $y \in \overline{S(x; r)}$ există un șir de puncte $\{x_n\} \subset S(x; r)$ care tinde către y. Atunci și normele $\|x_n - x\|$ tind către $\|y - x\|$ și cum, pentru orice n, $\|x_n - x\| < r$, rezultă $\|y - x\| \leqslant r$.

Bazați pe această propoziție, vom nota sfera închisă prin $\bar{S}(x; r)$.

Propoziția 12. *Fie $\bar{S}(x; r)$ și $\bar{S}(y; r')$ două sfere închise, r, $r' > 0$. Condiția necesară și suficientă ca intersecția*

$$\bar{S}(x; r) \cap \bar{S}(y; r')$$

să fie nevidă, este să fie satisfăcută inegalitatea

$$\|x - y\| \leqslant r + r'.$$

Demonstrație. Fie z astfel ca

$$\|z - x\| \leqslant r, \quad \|z - y\| \leqslant r'.$$

Atunci

$$\|x-y\| \leqslant \|z-x\| + \|z-y\| \leqslant r + r'.$$

Invers, dacă această inegalitate este satisfăcută, fie

$$z = \frac{r'}{r+r'}\, x + \frac{r}{r+r'}\, y.$$

Atunci

$$\|x-z\| = \frac{r}{r+r'}\|x-y\| \leqslant r,$$

$$\|y-z\| = \frac{r'}{r+r'}\|y-x\| \leqslant r'.$$

9. Ne ocupăm acum de subspațiile vectoriale închise și spațiile cît corespunzătoare.

P r o p o z i ț i a 13. *Dacă G este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial normat E, atunci și închiderea sa $\overline{G}$ este un subspațiu vectorial al lui E.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $x,\ y \in \overline{G}$ și $\{x_n\} \subset G$, $(y_n) \subset G$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Atunci

$$ax + by = \lim_{n\to\infty} (ax_n + by_n),$$

deci $ax + by \in \overline{G}$ oricare ar fi $a,\ b \in K$.

Subspațiile vectoriale închise ale unui spațiu vectorial normat au un rol deosebit printre celelalte subspații.

Vom adopta următoarea nomenclatură:

D e f i n i ț i a 9. *Fie E un spațiu vectorial normat. Prin subspațiu vectorial normat înțelegem un subspațiu vectorial închis, păstrînd pentru celelalte denumirea de subspații vectoriale.*

Spațiul cît al unui spațiu vectorial normat față de un subspațiu vectorial normat poate fi normat în mod natural.

D e f i n i ț i a 10. *Fie G un subspațiu vectorial normat al spațiului vectorial normat E. Pentru elementele $\dot{x} \in E/G$ numim normă expresia*

$$\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x\|. \tag{1}$$

Pentru a justifica această definiție, vom arăta că expresia (1) satisface într-adevăr condițiile normei, III_1, III_2, III_3.

Observăm că

$$\|\dot{x}\| = \inf_{x \in \dot{x}} \|x - 0\| = d(0,\ \dot{x}), \qquad (0 \in E).$$

Atunci, deoarece $\dot{x}$ este o mulțime închisă în E, evident că $\|\dot{x}\| > 0$ dacă $\dot{x} \neq 0$, $(0 \in E/G)$ și $\|0\| = 0$.

Celelalte condiții se verifică imediat.

Definiția 11. *Fie E un spațiu vectorial normat și G un subspațiu vectorial normat al său.*

Vom numi simplu spațiu cît al lui E prin G și vom nota E/G spațiul corespunzător normat cu ajutorul expresiei (1).

Se înțelege că în cazul unui spațiu vectorial normat E nu vom întrebuința denumirea de spațiu cît E/G decît dacă subspațiul G este închis.

§ 3. Spații Banach

1. Completitudinea joacă un rol esențial în teoria spațiilor topologice. De aceea și în teoria spațiilor vectoriale normate cele mai importante rezultate se obțin numai în cazul cînd este îndeplinită și această condiție.

Definiția 1. *Fie E un spațiu vectorial normat și $\{x_n\}$ un șir de elemente din E. Șirul $\{x_n\}$ se numește șir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel că $n,\ m \geqslant n_0(\varepsilon)$ implică*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Următoarea propoziție este o consecință imediată a condiției III_2.

Propoziția 1. *Într-un spațiu vectorial normat E, orice șir convergent către un element din E este un șir Cauchy.*

Demonstrație. Fie într-adevăr $\{x_n\} \subset E$ un șir convergent către elementul $x \in E$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel că $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implică

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, dacă $n,\ m \geqslant n_0(\varepsilon)$,

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon.$$

Se știe însă din topologia generală că reciproca nu este adevărată și spațiile în care orice șir Cauchy este convergent către un element se numesc complete.

În special pentru spațiile vectoriale normate dăm :

Definiția 2. *Se numește spațiu Banach orice spațiu vectorial normat complet B, adică orice spațiu vectorial normat B în care orice șir Cauchy este convergent către un element din B.*

2. Completitudinea se păstrează pentru submulțimile închise. Avem deci

Propoziția 2. *Orice subspațiu vectorial normat (deci închis, după terminologia adoptată) al unui spațiu Banach este un spațiu Banach.*

Demonstrație. Fie B un spațiu Banach și G un subspațiu vectorial normat. Un șir Cauchy inclus în G are un punct limită în E. Însă deoarece G este închis, acest punct limită îi aparține, deci G este complet.

3. Într-un spațiu Banach se poate enunța următorul criteriu de convergență pentru serii.

Teoremă. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir inclus în spațiul Banach* B. *Pentru ca seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

să fie convergentă, este suficient ca ea să fie absolut convergentă, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Demonstrație. Fie

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\sigma_n = \|x_1\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Următoarea inegalitate este satisfăcută:

$$\|s_n - s_m\| \leqslant |\sigma_n - \sigma_m|.$$

Deci dacă $\{\sigma_n\}$ este un șir Cauchy, $\{s_n\}$ este un șir Cauchy în B. Spațiul B fiind complet, există în el limita șirului s_n, adică suma seriei.

4. O generalizare a noțiunii de bază algebrică finită este dată de

Definiția 3. *Un șir* $\{u_n\}$ *de elemente ale spațiului Banach* B *se numește o bază a lui* B, *dacă pentru orice element* $x \in B$ *există un șir de numere* $\{a_n\}$ *și numai unul, astfel că*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n.$$

5. Se poate introduce o extensiune complexă a unui spațiu Banach real prin analogie cu definiția numerelor complexe.

Definiția 4. *Fie* B *un spațiu Banach real. Numim extensiune complexă a spațiului* B, *spațiul format din elementele de forma*

$$z = x + iy; \qquad x, y \in B, \qquad i^2 = -1,$$

în care operațiile de adunare și înmulțire cu scalari complecși sînt definite prin

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$
$$(\alpha + i\beta)\, z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x),$$

iar norma prin

$$\|z\| = \max_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |x \cos\theta + y \sin\theta|.$$

Notăm această extensiune complexă cu $\widetilde{B}$.

Se verifică ușor că $\widetilde{B}$ este într-adevăr un spațiu Banach complex.

§ 4. Spații vectoriale normate ordonate

În acest paragraf toate spațiile vectoriale sînt presupuse, chiar atunci cînd nu se spune explicit, reale.

Pentru ele deci corpul K al scalarilor este corpul numerelor reale, R.

1. Fie E o mulțime oarecare.

Definiția 1. *Mulțimea E se numește parțial-ordonată dacă pentru o parte din produsul cartezian $E \times E$ (mulțimea perechilor (x, y) cu x și $y \in E$) este definită o relație de ordonare $x < y$, ce satisface condiția*

$$x < y, \quad y < z \quad \text{implică} \quad x < z.$$

Dacă în plus este verificată și condiția

$$x < y, \quad y < x \quad \text{implică} \quad x = y,$$

relația de ordonare se numește proprie.

Vom întrebuința și notația $y > x$ pentru $x < y$.

2. Introducerea unei relații de ordonare în spațiile vectoriale, supusă la anumite condiții de compatibilitate cu structura algebrică și topologică, îmbogățește structura acestor spații și dă posibilitatea obținerii unor rezultate mai precise.

Definiția 2. *Numim spațiu vectorial ordonat un spațiu vectorial în care este definită o relație de ordonare $x \leqslant y$, satisfăcînd următoarele condiții:*

V_1. $x \geqslant 0$ *implică* $-x \leqslant 0$;

V_2. *dacă* $x \geqslant 0$ și $y \geqslant 0$, *atunci* $x + y \geqslant 0$;

V_3. *dacă* $x \geqslant 0$ și $a > 0$ $(a \in R)$, *atunci* $ax \geqslant 0$;

V_4. $x \leqslant y$ *este echivalent cu* $y - x \geqslant 0$.

Dacă spațiul vectorial este notat E, însemnăm prin E_+ mulțimea elementelor $x \in E$, $x \geqslant 0$. Mulțimea E_+ se numește mulțimea elementelor pozitive din E.

Dacă relația de ordonare este proprie, spunem că spațiul E este propriu ordonat.

Din definiție deducem următoarele proprietăți imediate.

Propoziția 1. *Dacă $x \leqslant y$, atunci $-y \geqslant -x$.*

Demonstrație. $x \leqslant y$ este echivalent cu $y - x \geqslant 0$ și din V_1 deducem $-y + x \leqslant 0$, ceea ce este echivalent cu $-y \leqslant -x$.

Propoziția 2. *$x_1 \leqslant y_1$ și $x_2 \leqslant y_2$ implică $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$.*

Demonstrație: $x_1 \leqslant y_1$ și $x_2 \leqslant y_2$ implică, în virtutea condiției V_2,

$$y_1 - x_1 + y_2 - x_1 \geqslant 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$y_1 + y_2 \geqslant x_1 + x_2.$$

3. Fie acum E un spațiu vectorial normat ordonat, și $\operatorname{int} E_+ \neq 0$.

Definiția 3. *Însemnăm prin $x \ll y$ relația*

$$y - x \in \operatorname{int} E_+.$$

Elementele $x \gg 0$ din E le numim supra-pozitive.

Următoarele proprietăți arată că relația $\ll$ este o relație de ordonare strictă și verifică condițiile V_1, V_2, V_3, V_4.

Propoziția 3. *Dacă $x \gg 0$ și $a > 0$ $(a \in R)$, atunci $ax \gg 0$.*

În general, dacă $x \ll y$, $a > 0$, atunci $ax \ll ay$.

Demonstrație. $x \gg 0$ înseamnă că x aparține lui E_+ împreună cu o sferă de rază pozitivă $S(x; r)$.

De aici deducem că $ax \in E_+$ (condiția V_3) și

$$S(ax; ar) \subset E_+,$$

pentru că $\|y - ax\| < ar$ este echivalent cu

$$\left\| x - \frac{1}{a} y \right\| < r,$$

de unde deducem $\frac{1}{a} y \in E_+$, deci și $y \in E_+$.

Dacă $y - x \gg 0$, atunci $a(y - x) \gg 0$, deci și a doua parte a propoziției este verificată.

Propoziția 4. *Relația* $x \gg 0$ *implică* $-x \ll 0$.

Demonstrație. Fie $S(x; r)$, $r > 0$, o sferă de centru x, inclusă în E_+. Atunci

$$S(-x; r) \subset -E_+.$$

Propoziția 5. *Dacă în relațiile* $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, *cel puțin un semn* $\leqslant$ *este înlocuit prin* $\ll$, *atunci*

$$x \ll z.$$

Demonstrație. Fie, de exemplu, $x \ll y$, $y \leqslant z$.

Atunci $u = y - x \gg 0$, $v = z - y \geqslant 0$.

Dacă sfera $S(u; r)$ este inclusă în E_+, atunci

$$S(u + v; r) \subset E_+,$$

pentru că $S(u + v; r) = S(u; r) + v$.

Propoziția 6. *Dacă* $x_1 \ll y_1$, $x_2 \leqslant y_2$, *atunci*

$$x_1 + x_2 \ll y_1 + y_2.$$

Demonstrație. Fie $u = y_1 - x_1$, $v = y_2 - x_2$.

Atunci $u + v \gg 0$ și

$$y_1 - x_1 + y_2 - x_2 = (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2) \gg 0.$$

Propoziția 7. *Orice element* $x \in E$ *este de forma*

$$x = u - v \quad \text{cu} \quad u, v \gg 0.$$

Demonstrație. Fie $u_1 \gg 0$ și $S(u_1; r_1) \subset E_+$.

Pentru orice $x \in E$ și $r < r_1$,

$$u_1 \pm \frac{r}{\|x\|} x \gg 0, \quad \text{de unde} \quad \frac{\|x\|}{r} u_1 \pm x \gg 0.$$

Punînd

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{r} u_1 + x\right), \quad v = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{r} u_1 - x\right)$$

propoziția este demonstrată.

Propoziția 8. *Relațiile* $x \ll y$, $x = y$, $x \gg y$ *se exclud una pe alta.*

4. O categorie importantă de spații ordonate este dată de

Definiția 4. *Un spațiu vectorial normat ordonat* E, *care se bucură de proprietatea că orice* $x \in E$ *este de forma*

$$x = u - v \quad \text{cu} \quad u, v \in E_+,$$

se numește decompozabil.

Propoziția următoare este o consecință a propoziției 7.

Propoziția 9. *Dacă* $\operatorname{int} E_+ \neq 0$, *spațiul* E *este decompozabil.*

Definiția 5. *Fie* E *o mulțime propriu ordonată. Însemnăm prin* $\sup(x, y)$, *dacă există, elementul din* E *determinat de condițiile următoare*:

1) $x < \sup(x, y)$, $y < \sup(x, y)$;

2) $x < z$, $y < z$ *implică* $\sup(x, y) < z$.

Definiția 6. *Numim latice vectorială un spațiu vectorial propriu ordonat* E *în care* $\sup(x, y)$ *există pentru orice pereche de elemente* $x, y \in E$. *Dacă* $\sup(x, y)$ *există numai pentru* $x, y \in E_+$, *spunem că* E *este o semilatice vectorială.*

Se înțelege de la sine ce va însemna o latice vectorială normată, sau o latice Banach.

Propoziția 10. *O semilatice vectorială decompozabilă este o latice vectorială.*

Demonstrație. Fie $x_1 = u_1 - v_1$, $x_2 = u_2 - v_2$, $u_1, v_1, u_2, v_2 \in E_+$.

Atunci

$$x_1 + v_1 + v_2 \in E_+ \quad , \quad x_2 + v_1 + v_2 \in E_+$$

și, prin urmare, există

$$W = \sup(x_1 + v_1 + v_2, \quad x_2 + v_1 + v_2).$$

De aici

$$W - v_1 - v_2 = \sup(x_1, x_2).$$

Propoziția 11. *Într-o latice vectorială* E *există pentru orice* $x \in E$, *elementele*

$$x_+ = \sup(x, 0), \quad x_- = x_+ - x = \sup(-x, 0).$$

Descompunerea

$$x = x_+ - x_-$$

este minimală în sensul că dacă

$$x = x' - x'' \qquad \text{cu} \quad x' \text{ și } x'' \in E_+$$

atunci

$$x' \geqslant x_+ \quad , \quad x'' \geqslant x_-.$$

Demonstrație. Existența elementelor x_+ și x_- este evidentă. Fie acum

$$x = x' - x'' \quad \text{cu} \quad x',\ x'' \in E_+ .$$

Atunci

$$x' = x + x'' \geqslant x \quad \text{și} \quad x' \geqslant 0,$$

de unde

$$x' \geqslant \sup (x,\ 0) = x_+ .$$

Analog

$$x'' \geqslant \sup (-x,\ 0) = x_- .$$

Este ușor de verificat și

Propoziția 12. *Într-o latice vectorială E există, pentru orice $x,\ y \in E$, elementul*

$$\inf (x,\ y)$$

definit prin condițiile

$$\inf (x,\ y) \leqslant x, \quad \inf (x,\ y) \leqslant y$$

și

$$z \leqslant x, \quad z \leqslant y \quad \textit{implică} \quad z \leqslant \inf (x,\ y).$$

5. Introducem și

Definiția 7. *Un spațiu E vectorial normat ordonat se numește normal-ordonat dacă există un număr real $\delta > 0$, astfel că pentru orice elemente $x,\ y \in E_+$ cu $\|x\| = \|y\| = 1$ să avem*

$$\|x + y\| \geqslant \delta.$$

Într-o latice vectorială se poate defini o normă în mod natural, dacă există un element unitate relativ la ordonare.

Definiția 8. *Fie E o latice vectorială. Elementul pozitiv $\neq 0$, $e \in E$ se numește element unitate relativ la ordonare dacă pentru orice $x \in E$ există un număr real $\lambda \geqslant 0$, astfel ca*

$$-\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e. \tag{1}$$

Teoremă. *O latice vectorială E cu un element unitate devine o latice vectorială normată dacă se ia ca normă expresia*

$$\|x\| = \inf \{ \lambda \mid -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e \}. \tag{2}$$

Demonstrație. Datorită definiției elementului unitate, numărul $\|x\|$ este definit pentru orice $x \in E$.

Rămîne să verificăm condițiile normei:

III_1 este evidentă;

III_2 rezultă din faptul că relațiile

$$-ae \leqslant x \leqslant ae$$

$$-be \leqslant y \leqslant be$$

implică

$$-(a + b)\, e \leqslant x + y \leqslant (a + b)\, e;$$

III_3 rezultă din faptul că relația

$$-\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e$$

implică

$$-|a|\lambda e \leqslant ax \leqslant |a|\lambda e.$$

Definiția 9. *Într-o latice vectorială E vom nota prin $|x|$, elementul*

$$|x| = \sup(x_+, x_-)$$

pentru orice $x \in E$.

Propoziția 13. *Norma* (2) *satisface următoarea condiție:*

$$|x| \leqslant |y| \quad \textit{implică} \quad \|x\| \leqslant \|y\|.$$

6. Relația de ordonare dintr-un spațiu vectorial poate fi determinată dacă se dă mulțimea elementelor pozitive E_+.

Proprietățile esențiale ale mulțimii E_+ sînt:

α) Dacă $x \in E_+$, atunci $ax \in E_+$ pentru orice $a \in R$, $a \geqslant 0$.

β) Dacă $x \in E_+$ și $y \in E_+$, atunci $x + y \in E_+$.

Se poate verifica imediat că orice submulțime a unui spațiu vectorial, care satisface aceste condiții, determină în acel spațiu o relație de ordonare.

Modul acesta de a introduce relația de ordonare a fost utilizat de matematicienii sovietici M. G. Krein și M. A. Rutman [184].

Pentru a păstra unele enunțuri din lucrarea citată, în teoreme ulterioare, reproducem următoarea definiție.

Definiția 10. *Fie E un spațiu vectorial real.*

O submulțime E_+ a lui E, care satisface condițiile α) și β), se numește semigrup liniar.

§ 5. Latice vectoriale complete

1. Vom introduce acum o noțiune de completitudine legată de relația de ordonare.

Definiția 1. *Fie E un spațiu vectorial propriu ordonat. Spunem că mulțimea $A \subset E$ este mărginită superior dacă există un element $x_0 \in E$ astfel ca pentru orice $x \in A$ să avem*

$$x_0 \geqslant x.$$

Analog se definește o mulțime mărginită inferior.

Definiția 2. *Fie E un spațiu vectorial propriu ordonat și A o mulțime de elemente din E.*

Definim elementul sup $A = \sup\{x \mid x \in A\}$ (atunci cînd există) prin următoarele condiții

$$\sup A \geqslant x \quad \textit{pentru orice} \quad x \in A; \tag{1}$$

$$z \geqslant x \quad \textit{pentru orice} \quad x \in A \ \textit{implică} \tag{2}$$

$$z \geqslant \sup A.$$

Definiția 3. *Un spațiu vectorial propriu ordonat E se numește latice vectorială completă dacă pentru orice mulțime $A \subset E$ mărginită superior, există în E elementul sup A.*

2. Fie E o mulțime oarecare și F o familie de părți ale mulțimii E. Se spune că F are proprietatea intersecției binare dacă pentru orice subfamilie $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset F$, condiția

$$A_\alpha \cap A_\beta \neq \theta, \qquad (\alpha, \beta \in I)$$

implică

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \theta.$$

Noi vom utiliza proprietatea intersecției binare numai pentru familia sferelor închise ale unui spațiu vectorial normat. Pentru simplificare, adoptăm:

Definiția 4. *Spunem că spațiul vectorial normat E are proprietatea intersecției binare, dacă pentru orice familie $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de sfere închise din E, astfel încît*

$$S_\alpha \cap S_\beta \neq \theta,$$

este verificată și relația

$$\bigcap_{\alpha \in I} S_\alpha \neq \theta.$$

Teoremă. *O latice vectorială completă cu un element unitate, e, normată prin expresia*

$$\|x\| = \inf \{ \lambda \mid -\lambda e \leqslant x \leqslant \lambda e \}.$$

devine un spațiu vectorial normat cu proprietatea intersecției binare.

Demonstrație. Am arătat în teorema din paragraful 4 că o latice vectorială cu element unitate devine un spațiu vectorial normat, dacă se ia ca normă expresia (2) din paragraful 4.

Rămîne să arătăm că, dacă laticea este completă, spațiul vectorial normat obținut are proprietatea intersecției binare.

Este ușor de verificat că sfera închisă de centru x_0 și de rază r este mulțimea punctelor $x \in E$ care satisfac relația

$$x_0 - re \leqslant x \leqslant x_0 + re.$$

Fie, în general, $[x_0, y_0]$ mulțimea punctelor $x \in E$ care satisfac relația

$$x_0 \leqslant x \leqslant y_0.$$

Această mulțime se mai numește și segmentul de extremități x_0, y_0 (relativ la relația de ordonare).

Considerăm o mulțime de segmente

$$\{[x_\alpha, y_\alpha]\}_{\alpha \in I},$$

astfel încît

$$[x_\alpha, y_\alpha] \cap [x_\beta, y_\beta] \neq \theta \quad \text{pentru orice} \quad \alpha, \beta \in I \qquad (3)$$

şi vom arăta că

$$\bigcap_{\alpha \in I} [x_\alpha , y_\alpha] \neq \emptyset.$$

Relaţia (3) ne arată că pentru orice pereche de indici $\alpha, \beta \in I$ există un element $z_{\alpha\beta}$, astfel că

$$x_\alpha \leqslant z_{\alpha\beta} \leqslant y_\alpha$$
$$x_\beta \leqslant z_{\alpha\beta} \leqslant y_\beta ,$$

de unde deducem

$$x_\alpha \leqslant y_\beta \quad \text{pentru orice} \quad \alpha, \beta \in I.$$

De aici rezultă că mulţimea $\{ x_\alpha \}_{\alpha \in I}$ este mărginită superior, iar mulţimea $\{ y_\alpha \}_{\alpha \in I}$ este mărginită inferior. Prin urmare există elementele

$$\sup \{ x_\alpha \mid \alpha \in I \} \quad \text{şi} \quad \inf \{ y_\alpha \mid \alpha \in I \}$$

şi avem

$$\sup \{ x_\alpha \} \leqslant \inf \{ y_\alpha \}. \tag{4}$$

Atunci orice element z care verifică relaţia

$$\sup \{ x_\alpha \} \leqslant z \leqslant \inf \{ y_\alpha \},$$

verifică şi relaţia

$$x_\alpha \leqslant z \leqslant y_\beta , \quad \text{pentru orice} \quad \alpha, \beta \in I,$$

deci în particular

$$x_\gamma \leqslant z \leqslant y_\gamma , \quad \text{pentru orice} \quad \gamma \in I.$$

Cum astfel de elemente există în baza relaţiei (4), este demonstrată relaţia

$$\bigcap_{\alpha \in I} [x_\alpha , y_\alpha] \neq \emptyset.$$

Deoarece sferele închise sînt segmente (relativ la relaţia de ordonare), rezultă că proprietatea intersecţiei binare este satisfăcută.

§ 6. Produs cartezian şi produs tensorial

1. Dintr-o familie de spaţii vectoriale se pot obţine noi spaţii vectoriale prin mai multe procedee.

Examinăm două combinaţii de natură algebrică şi topologică, anume produsul cartezian şi produsul tensorial sau direct.

Definiţia 1. *Fie $\{ E_\iota \}_{\iota \in I}$ o mulţime de spaţii vectoriale. Numim produs cartezian al spaţiilor E_ι şi notăm cu*

$$\bigtimes_{\iota \in I} E_\iota$$

mulțimea elementelor de forma

$$x = (x_\iota)_{\iota \in I} \quad \textit{unde} \quad x_\iota \in E_\iota,$$

înzestrată cu următoarea structură vectorială

$$x + y = (x_\iota + y_\iota)_{\iota \in I}$$
$$ax = (ax_\iota)_{\iota \in I}.$$

Se verifică ușor că aceste reguli definesc într-adevăr o structură de spațiu vectorial.

Dacă mulțimea de indici I este finită, produsul cartezian se scrie

$$\bigtimes_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$$

și are ca elemente

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{cu} \quad x_i \in E_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și ca operații algebrice

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n).$$

În cazul spațiilor vectoriale normate, produsul cartezian se poate norma în mai multe feluri, dintre care amintim numai următoarele pentru produsele finite:

$$\|x\|^{(0)} = \max(\|x_1\|, \quad \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|);$$
$$\|x\|^{(p)} = (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{1/p},$$

p fiind număr real $\geqslant 1$.

2. Înainte de a trece la demonstrarea proprietăților normei pentru expresiile $\|x\|^{(0)}$ și $\|x\|^{(p)}$, vom demonstra unele inegalități importante, pe care le vom folosi și mai tîrziu.

P r o p o z i ț i a 1. *Fie* $a, b \geqslant 0$ *două numere reale,* $p > 1$ *și* $q > 1$ astfel ca

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Atunci este valabilă inegalitatea

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1}$$

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm funcția reală de variabilă reală

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}, \qquad t > 0.$$

Derivata acestei funcţii este

$$f'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1}$$

şi se anulează pentru $t = 1$.

De asemenea

$$f'(t) < 0 \quad \text{dacă} \quad t < 1$$

$$f'(t) > 0 \quad \text{dacă} \quad t > 1$$

deci $f(t)$ are un minimum în $t = 1$, unde $f(t) = 1$.

Înlocuind pe t prin $a^{1/q} b^{-1/p}$, obţinem

$$1 \leqslant \frac{1}{p} a^{p/q} b^{-1} + \frac{1}{q} a^{-1} b^{q/p},$$

$$1 \leqslant \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{p} a^{p/q+1} + \frac{1}{q} b^{q/p+1}\right),$$

$$1 \leqslant \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{p} a^{p} + \frac{1}{q} b^{q}\right),$$

adică tocmai inegalitatea (1).

Propoziţia 2. *Fie* $a_i, b_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *numere reale, iar* p *şi* q *ca în propoziţia* 1. *Atunci este valabilă inegalitatea lui* Hölder:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Punînd în inegalitatea (1)

$$a = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}, \qquad b = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}$$

obţinem

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{a_i^p}{p \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^q}.$$

Însumînd în raport cu i, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

Am obţinut inegalitatea (2), pentru că $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Observaţie. Inegalitatea lui Hölder se demonstrează în mod analog dacă suma finită este înlocuită printr-o serie sau printr-o integrală.

Propoziția 3. *Fie* $a_i, b_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *numere reale,* $p \geqslant 1$ *număr real. Atunci este valabilă inegalitatea lui* Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Demonstrație. Pentru $p = 1$, inegalitatea este evidentă. Pentru $p > 1$, folosim inegalitatea lui Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1} a_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1} b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right).$$

3. Cu ajutorul inegalității lui Minkowski se demonstrează

Teorema 1. *Expresiile*

$$\|x\|^{(0)} = \max(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|) \tag{4}$$

$$\|x\|^{(p)} = (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{1/p} \tag{5}$$

sînt norme echivalente topologic pentru produsul cartezian

$$\bigtimes_{i=1}^{n} E_i.$$

Demonstrație. Să arătăm întîi că expresia (4) este o normă: Condițiile III_1 și III_3 sînt evidente. Condiția III_2 rezultă din

$$\|x + y\|^{(0)} = \max(\|x_1 + y_1\|, \ldots, \|x_n + y_n\|) \leqslant$$
$$\leqslant \max(\|x_1\| + \|y_1\|, \ldots, \|x_n\| + \|y_n\|) \leqslant$$
$$\leqslant \max(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|) + \max(\|y_1\| + \ldots + \|y_n\|) =$$
$$= \|x\|^{(0)} + \|y\|^{(0)}.$$

Pentru expresia (5) de asemenea sînt evidente condițiile III_1 și III_3, iar condiția III_2 se demonstrează cu ajutorul inegalității lui Minkowski

$$\|x + y\|^{(p)} = (\|x_1 + y_1\|^p + \ldots + \|x_n + y_n\|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\|x_1\| + \|y_1\|)^p + \ldots + (\|x_n\| + \|y_n\|)^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{1/p} + (\|y_1\|^p + \ldots + \|y_n\|^p)^{1/p} =$$
$$= \|x\|^{(p)} + \|y\|^{(p)}.$$

Echivalenţa topologică a normelor va rezulta dintr-un criteriu, pe care îl vom da în capitolul II.

4. Introducem acum noţiunea de produs tensorial a două spaţii vectoriale.

Fie E_1 şi E_2 două spaţii vectoriale. Definim expresiile formate cu elemente $x_i \in E_1$ şi $y_i \in E_2$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n$$

şi relaţia $\sim$ prin următoarele condiţii:

α) $$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \sim \sum_{i=1}^{m} x_{P(i)} \times y_{P(i)}$$

pentru orice permutare $P(i)$ a indicilor $i = 1, 2, \ldots, n$,

β_1) $$(x_1' + x_1'') \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n \sim$$
$$\sim x_1' \times y_1 + x_1'' \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n;$$

β_2) $$x_1 \times (y_1' + y_1'') + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n \sim$$
$$\sim x_1 \times y_1' + x_1 \times y_1'' + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n;$$

γ) $$(a_1 x_1) \times y_1 + (a_2 x_2) \times y_2 + \ldots + (a_n x_n) \times y_n \sim$$
$$\sim x_1 \times (a_1 y_1) + x_2 \times (a_2 y_2) + \ldots + x_n \times (a_n y_n).$$

Definiţia 2. *Două expresii* $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ *şi* $\sum_{i=1}^{n} x_i' \times y_i'$ *sînt numite echivalente dacă oricare din ele poate fi obţinută din cealaltă prin aplicarea condiţiilor* α), β), γ) *de un număr finit de ori. Vom nota relaţia de echivalenţă prin semnul* $\simeq$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \simeq \sum_{i=1}^{n} x_i' \times y_i'.$$

Se verifică imediat că relaţia $\simeq$ îndeplineşte condiţiile unei relaţii de echivalenţă, adică este reflexivă (condiţia α)) şi tranzitivă.

Vom examina cîteva proprietăţi ale expresiilor $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$.

Propoziţia 4. *Dacă*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \simeq \sum_{i=1}^{n'} x_i' \times y_i'$$

şi

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \times v_i \simeq \sum_{i=1}^{m'} u_i' \times v_i'$$

atunci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i + \sum_{i=1}^{m} u_i \times v_i \simeq \sum_{i=1}^{n'} x_i' \times y_i' + \sum_{i=1}^{m'} u_i' \times v_i'.$$

Demonstrația este evidentă.

Definiția 3. *Considerăm expresia* $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i$.

Fie $\{u_1, \ldots, u_k\}$ *o bază a subspațiului (în* E_1*) generat de elementele* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *și* $\{v_1, \ldots, v_l\}$ *o bază a subspațiului (în* E_2*) generat de elementele* $y_1, y_2, \ldots, y_n$. *Atunci*

$$x_i = \sum_{p=1}^{k} a_p^i u_p, \qquad y_i = \sum_{q=1}^{l} b_q^i v_q, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{k} a_p^i u_p\right) \barwedge \left(\sum_{q=1}^{l} b_q^i v_q\right) \simeq$$

$$\simeq \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{n} a_p^i b_q^i\right) u_p \barwedge v_q \simeq \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{pq} u_p \barwedge v_q, \qquad (6)$$

unde

$$a_{pq} = \sum_{i=1}^{n} a_p^i b_q^i.$$

Numim rangul expresiei $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i$, *rangul matricei* (a_{pq}) $(p = 1, \ldots, k;$ $q = 1, \ldots, l)$.

Pentru a justifica această definiție demonstrăm.

Propoziția 5. *Rangul expresiei* $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i$ *este independent de alegerea bazelor* $\{u_1, \ldots, u_k\}$, $\{v_1, \ldots, v_l\}$.

Demonstrație. Fie $\{u_1', \ldots, u_k'\}$ respectiv $\{v_1', \ldots, v_l'\}$ alte baze ale subspațiilor considerate în definiția 3. Atunci

$$u_p = \sum_{r=1}^{k} b_{pr} u_r', \qquad v_q = \sum_{s=1}^{l} c_{qs} v_s',$$

unde (b_{pr}) $(p, r = 1, \ldots, k)$ și (c_{qs}) $(q, s = 1, \ldots, l)$ sînt matrici pătrate nesingulare. Înlocuind în (6)

$$\sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{pq} u_p \barwedge v_q \simeq \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{pq} \left(\sum_{r=1}^{k} b_{pr} u_r'\right) \barwedge \left(\sum_{s=1}^{l} c_{qs} v_s'\right)$$

deci, în definitiv,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{l} x_i \barwedge y_i \simeq \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{l} a_{rs}' u_r' \barwedge v_s'$$

unde matricea

$$(a_{rs}') = (b_{rp})\,(a_{pq})\,(c_{qs})$$

are același rang cu matricea (a_{pq}).

P r o p o z i ţ i a 6. *Rangul unei expresii* $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ *este invariant faţă de relaţia de echivalenţă* $\simeq$.

D e m o n s t r a ţ i e. Arătăm că transformările $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ nu modifică rangul, de unde rezultă că rangul a două expresii echivalente este acelaşi.

Pentru $\alpha)$ acest lucru este evident. Pentru $\beta_1)$, fie

$$x_1 = x_1' + x_1'', \qquad z = \frac{1}{2}(x_1' - x_1'').$$

Atunci

$$x_1' = \frac{1}{2} x_1 + z, \qquad x_1'' = \frac{1}{2} x_1 - z$$

de unde

$$x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n \simeq$$
$$\simeq \left(\frac{1}{2} x_1 + z\right) \times y_1 + \left(\frac{1}{2} x_1 - z\right) \times y_1 + x_2 \times y_2 + \ldots + x_n \times y_n. \tag{7}$$

Fie acum

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \simeq \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{l} a_{pq} u_p \times v_q,$$

unde $\{u_1, \ldots, u_k\}$, $\{v_1, \ldots, v_l\}$ sînt bazele din definiţia 3 şi

$$x_q^* = \sum_{p=1}^{k} a_{pq} u_p, \qquad (q = 1, \ldots, l).$$

Deoarece elementele $v_1, \ldots, v_k$ sînt liniar independente, rangul expresiei $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ este dat de numărul maxim de elemente liniar independente în mulţimea $\{x_q^*\}$, $(q = 1, \ldots, l)$.

Dacă $z = \sum_{p=1}^{k} a_p u_p$, se vede uşor că elementele x_q corespunzătoare celor două părţi ale relaţiei (7) sînt aceleaşi. Dacă z este liniar independent de elementele $u_p (p = 1, \ldots, k)$, atunci putem lua $u_{p+1} = z$, însă u_{p+1} apare cu coeficientul 0 în x_q^*, deci ajungem la aceeaşi concluzie, de unde rezultă că rangul expresiei din partea a doua a relaţiei (7) este egal cu rangul expresiei din partea întîia.

Analog se arată că $\beta_2)$ nu modifică rangul.

Pentru $\gamma)$, dacă un a_i este zero, putem lua $x_i = 0$. Dacă şi $y_i = 0$, putem neglija termenul corespunzător al expresiei. Dacă însă $y_i \neq 0$, îl putem lua drept v_1 şi este evident că nu contribuie la formarea elementelor x_q^* corespunzătoare, deci nu modifică rangul.

Putem considera deci numai cazul cînd toţi a_i sînt diferiţi de zero. În acest caz este evident că multiplicarea cu a_i nu modifică dependenţa sau independenţa liniară, deci nu modifică rangul expresiei.

P r o p o z i ț i a 7. *Orice expresie* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$ *este echivalentă sau cu* $0 \divideontimes 0$ *sau cu o expresie* $\sum_{i=1}^{m} u_i \divideontimes v_i$ *în care mulțimile* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *și* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *sînt liniar independente.*

Numărul m *este rangul expresiei* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă una dintre mulțimile $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ este liniar dependentă, atunci expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$ este echivalentă cu o expresie care are numai $n - 1$ termeni.

Într-adevăr, fie

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i.$$

Atunci

$$x_1 \divideontimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq \left(\sum_{i=2}^{n} a_i x_i\right) \divideontimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq$$

$$\simeq \sum_{i=2}^{n} (a_i x_i) \divideontimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes (a_i y_i) + \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq$$

$$\simeq \sum_{i=2}^{n} x_i \divideontimes (a_i y_1 + y_i).$$

Acest procedeu se poate continua pînă se ajunge la o expresie de forma $\sum_{i=1}^{m} u_i \divideontimes v_i$, în care mulțimile $\{u_1, \ldots, u_m\}$, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ sînt liniar independente, sau la una din formele $x \divideontimes 0$ sau $0 \divideontimes y$. Însă $x \divideontimes 0 \simeq x \divideontimes (0 \cdot 0) \simeq (0 \cdot x) \divideontimes 0 \simeq 0 \divideontimes 0$ și analog, $0 \divideontimes y \simeq 0 \divideontimes 0$.

Expresia $\sum_{i=1}^{m} u_i \divideontimes v_i$ are, după definiția 3 rangul m, deci și expresia echivalentă $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$ are rangul m.

P r o p o z i ț i a 8. *Dacă în expresia* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$, *mulțimea* $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *este liniar independentă, atunci rangul expresiei este dat de numărul maxim de elemente liniar independente din mulțimea* $\{x_1, \ldots, x_n\}$. *În particular, dacă* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq 0 \divideontimes 0$, *fiecare* $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă numărul r de elemente liniar independente din mulțimea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ este 0, rangul este evident 0 (aceasta înseamnă că toate elementele sînt egale cu 0). Presupunem $r \neq 0$ și $\{x_1, \ldots, x_r\}$ liniar independentă, iar

$$x_{r+p} = \sum_{k=1}^{r} a_{pk} x_k.$$

Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \barwedge y_k \simeq \sum_{k=1}^{r} x_k \barwedge y_k + \sum_{p=1}^{n-r} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{pk} x_k \right) \barwedge y_{r+p} \simeq$$

$$\simeq \sum_{k=1}^{r} x_k \barwedge \left(y_k + \sum_{p=1}^{n-r} a_{pk} y_{r+p} \right) \simeq \sum_{k=1}^{r} x_k \barwedge v_k ,$$

unde

$$v_k = y_k + \sum_{p=1}^{n-r} a_{pk} y_{r+p}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Deoarece mulţimea $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ este liniar independentă, rezultă că şi mulţimea $\{ v_1, \ldots, v_r \}$ este liniar independentă.

Rangul expresiei $\sum_{k=1}^{r} x_k \barwedge v_k$ este r (propoziţia 7), deci şi rangul expresiei $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i$ este r.

Mai departe, din propoziţia 7 rezultă că o expresie este echivalentă cu $0 \barwedge 0$ dacă şi numai dacă are rangul 0. Pe de altă parte rangul expresiei fiind 0 dacă şi numai dacă fiecare $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, deci este demonstrată şi ultima parte a propoziţiei.

P r o p o z i ţ i a 9. *Dacă* $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i \simeq \sum_{i=1}^{n} x'_i \barwedge y_i$ *şi mulţimea* $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ *este liniar independentă, atunci* $x_i = x'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

D e m o n s t r a ţ i e. Este un corolar al propoziţiei 8.

P r o p o z i ţ i a 10. *Dacă* $\sum_{i=1}^{n} x_i \barwedge y_i \simeq 0 \barwedge 0$ *şi în mulţimea* $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ *sînt* k *elemente liniar independente, iar în mulţimea* $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ *sînt* l *elemente liniar independente, atunci*

$$k + l \leqslant n$$

D e m o n s t r a ţ i e. Presupunem că mulţimea $\{ y_1, \ldots, y_l \}$ este liniar independentă şi $y_{l+i} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} y_j$ $(i = 1, \ldots, n-l)$.

Atunci

$$0 \barwedge 0 \simeq \sum_{j=1}^{n} x_j \barwedge y_j \simeq$$

$$\simeq \sum_{j=1}^{l} x_j \barwedge y_j + \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{n-l} a_{ij} x_{l+i} \right) \barwedge y_j \simeq \sum_{j=1}^{l} \left(x_j + \sum_{i=1}^{n-l} a_{ij} x_{l+i} \right) \barwedge y_j .$$

Din propoziţia 8 rezultă că

$$x_j + \sum_{i=1}^{n-l} a_{ij} x_{l+i} = 0, \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

De aici rezultă că în mulţimea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ pot fi cel mult $n-l$ elemente liniar independente.

P r o p o z i ț i a 11. *Dacă* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i \simeq \sum_{j=1}^{m} u_j \divideontimes v_j$ *și mulțimile* $\{(x_1,..,x_n\}$, $\{y_1,..,y_n\})$, $\{u_1,..,u_m\}$, $\{v_1,...,v_m\}$ *sînt liniar independente, atunci* $n = m$ *și există o matrice pătrată* (a_{ij}) *și matricea inversă* (A_{ij}) $(i, j = 1,..., n)$, *astfel* încît

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, y_j\,; \text{ și } u_k = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\, x_j\,.$$

D e m o n s t r a ț i e. Propoziția 8 ne arată că n și m sînt rangurile expresiilor respective, deci, expresiile fiind echivalente, $n = m$.

Mai departe, avem

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i + \sum_{j=1}^{n} (-u_j) \divideontimes v_j \simeq 0 \divideontimes 0. \tag{8}$$

Întrucît mulțimea $\{x_1,..., x_n\}$ este liniar independentă, din propoziția 10 rezultă că în mulțimea $\{y_1,.., y_n, v_1,.., v_n\}$ cel mult n elemente pot fi liniar independente, de unde deducem că elementele $v_1,.., v_n$ sînt combinații liniare de elemente $y_1,.., y_n$,

$$v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j\,.$$

Deoarece însă mulțimea $\{v_1,.., v_n\}$ este liniar independentă, matricea (a_{ij}) are o inversă (A_{ij}) $(i, j = 1,..., n)$

și

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\, v_k\,.$$

Înlocuind în (8), obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i - u_k \right) \divideontimes v_k \simeq 0 \divideontimes 0$$

deci (propoziția 8),

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, x_i\,.$$

P r o p o z i ț i a 12. *Mulțimea tuturor expresiilor* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$ *este un spațiu vectorial, în care adunarea este dată chiar de definiția expresiilor, iar înmulțirea cu scalari de relația*

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i = \sum_{i=1}^{n} (a\, x_i) \divideontimes y_i\,.$$

Expresiile echivalente cu $0 \divideontimes 0$ *formează un subspațiu vectorial.*

Demonstrația este evidentă.

5. Putem da acum

D e f i n i ț i a 4. *Considerăm spațiul vectorial al expresiilor* $\sum_{i=1}^{n} x_i \divideontimes y_i$ *și subspațiul expresiilor echivalente cu* $0 \divideontimes 0$. *Spațiul cît corespunzător, adică*

mulţimea claselor de echivalenţă faţă de relaţia $\simeq$, *se numeşte produsul tensorial, sau produsul direct al spaţiilor* E_1 *şi* E_2 *şi se notează*

$$E_1 \times E_2.$$

Operaţiile algebrice în spaţiul $E_1 \times E_2$ se definesc în mod obişnuit, prin operaţii între reprezentanţi: suma a două clase de echivalenţă este clasa care conţine suma a doi reprezentanţi oarecare respectivi ai celor două clase, iar produsul unui număr printr-o clasă este clasa care conţine produsul acelui număr printr-un reprezentant oarecare al clasei date.

Următoarea teoremă prezintă un interes deosebit pentru aplicaţia pe care urmărim să o dăm noţiunii de produs tensorial.

T e o r e m a 2. *Fie* L_1 *şi* L_2 *două subspaţii vectoriale ale spaţiilor vectoriale* E_1 *şi* E_2, *respectiv. Produsul tensorial* $L_1 \times L_2$ *este algebric izomorf cu un subspaţiu vectorial al produsului* $E_1 \times E_2$.

D e m o n s t r a ţ i e. Considerăm două elemente din $L_1 \times L_2$ având ca reprezentanţi, respectiv, expresiile

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{m} x'_k \times y'_k$$

cu $x_i \in L_1$, $y_i \in L_2$ $(i = 1, 2, .., n)$ şi $x'_k \in L_1$, $y'_k \in L_2$ $(k = 1,2,.., m)$. Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i + \sum_{k=1}^{m} x'_k \times y'_k \simeq \sum_{j=1}^{n+m} x''_j \times y''_j,$$

unde $x''_j = x_i$ şi $y''_j = y_i$ pentru $j = 1,2,.., n$ şi $x''_j = x'_k$, $y''_j = y^k$ pentru $j = n + k$ $(k = 1,..., m)$.

De asemenea, prin definiţie,

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = \sum_{i+1}^{n} (a\, x_i) \times y_i$$

deci clasele $\bar{x}$, elemente din $E_1 \times E_2$, care conţin expresii de forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \quad \text{cu } x_i \in L_1, \; y_i \in L_2 \qquad (i = 1,.., n)$$

constituie un subspaţiu vectorial al spaţiului $E_1 \times E_2$. Acest subspaţiu este evident izomorf algebric cu spaţiul $L_1 \times L_2$.

Făcînd abstracţie de acest izomorfism, vom spune că $L_1 \times L_2$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului $E_1 \times E_2$.

6. Dacă spaţiile E_1 şi E_2 sînt normate, produsul tensorial $E_1 \times E_2$ poate fi normat, cu ajutorul normelor din spaţiile E_1 şi E_2, prin norma

$$N_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i\right) = \inf \sum_{i=1}^{m} \|u_i\| \; \|v_i\|,$$

unde marginea inferioară este luată pe mulţimea tuturor expresiilor $\sum_{i=1}^{m} u_i \times v_i$ echivalente cu expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$.

Însă, întrucît această normă nu este folosită în această carte, nu insistăm asupra ei.

În capitolul III vom defini o altă normă, în care intervin funcționalele liniare continui, definite pe spațiile E_1 și E_2.

7. Produsul tensorial poate fi generalizat pentru un număr finit oarecare de spații vectoriale, considerînd expresiile de forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i \times \ldots \times w_i$$

și relația $\sim$ satisfăcînd reguli ce se deduc imediat din $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Primele studii asupra unor spații vectoriale funcționale au fost făcute de V. Volterra, M. Fréchet [87], [88] și de F. Riesz [225], [226]. Noțiunea de spațiu vectorial normat a fost introdusă de S. Banach în teza sa [44], însă proprietățile normei au fost puse în evidență mai înainte, pe un caz particular — spațiul funcțiilor continui — de F. Riesz [224]. Independent de Banach, noțiunea de spațiu vectorial a mai fost studiată de N. Wiener.

Asupra paragrafelor 1, 2, 3, pot fi consultate lucrările: S. Banach [5], L. A. Liusternik și V. I. Sobolev [17], Al. Ghika [10], F. Riesz [23].

2. Dezvoltarea actuală a spațiilor vectoriale în general se datorește în mare parte cercetătorilor sovietici, care și-au îndreptat atenția în special asupra problemelor de analiză funcțională care aduc contribuții, noi, efective, în rezolvarea problemelor fundamentale de analiză clasică și a celor din domeniile aplicative (fizica matematică, mecanica cuantică etc.).

3. Ordonarea spațiilor vectoriale a fost preconizată de F. Riesz [228] și prezentată sistematic în același timp de H. Freudenthal [91] și L. V. Kantorovici [152]. L. V. Kantorovici a creat printre matematicienii sovietici o școală, ale cărei bogate rezultate sînt expuse în cartea [14] de L. V. Kantorovici, B. Z. Vulih și A. G. Pinsker și în memoriul expozitoriu [153] al aceloraș autori.

În cartea de față însă nu sînt studiate spațiile vectoriale ordonate în general, așa cum sînt studiate în [14], ci numai spațiile vectoriale normate care sînt în același timp și ordonate. Studiul acestor spații a fost întreprins, în special, de alți matematicieni sovietici, M. G. Krein și colaboratorii săi. Rezultatele, foarte profunde și de aplicabilitate directă, ale acestor matematicieni sînt expuse în lucrarea [187] a lui M. G. Krein și M. A. Rutman. Prezentarea făcută de noi în paragraful 4 diferă de aceea a lui M. G. Krein și M. A. Rutman prin terminologie. În lucrarea [187], structura de ordonare a unui spațiu Banach B este dată prin mulțimea B_+ a elementelor pozitive, notată acolo cu K și care este numită, succesiv, semigrup liniar, con, con spațial, con miniedral etc., după diversele proprietăți care îi sînt atribuite.

4. Noțiunea de produs cartezian pentru spațiile normate este conformă cu aceea cunoscută pentru spațiile topologice.

Produsul tensorial este însă specific spațiilor vectoriale și a fost studiat sistematic de R. Schatten [24].

CAPITOLUL II

OPERAȚII LINIARE ȘI MULTILINIARE

Acest capitol conține descrierea funcțiilor definite în spațiile vectoriale și care au proprietatea esențială că păstrează natura algebrică a mulțimilor pe care sînt definite, adică structura de spațiu vectorial sau, mai pe scurt, liniaritatea.

Astfel de funcții se numesc în analiza funcțională „operații liniare".

Sînt studiate operațiile liniare și proprietățile lor atunci cînd li se mai impun diferite condiții de natură topologică.

În legătură cu operațiile liniare sînt studiate și operațiile multiliniare, care sînt funcții de mai multe variabile, liniare în fiecare variabilă.

§ 1. Operații liniare

1. Definim mai întîi categoriile importante de operații liniare și studiem proprietățile generale ale lor.

Definiția 1. *Fie E și E' două spații vectoriale față de corpul K. O funcție T definită pe un subspațiu vectorial E_1 al spațiului E și cu valori în E' se numește operație aditivă dacă*

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad \text{pentru orice } x, y \in E_1.$$

Funcția T se numește o operație omogenă dacă

$$T(ax) = aT(x) \qquad \text{pentru orice } x \in E_1 \text{ și } a \in K.$$

O operație aditivă și omogenă se numește liniară.

Vom întrebuința denumirea de domeniu pentru mulțimea de definiție E_1, și de contradomeniu pentru imaginea ei prin T, anume $T(E_1)$.

Liniaritatea operației T restrînge natura contradomeniului $T(E_1)$. Propoziția următoare este o consecință imediată a definiției.

Propoziția 1. *Dacă T este o operație liniară definită pe $E_1 \subset E$ și cu valori în E', atunci contradomeniul $T(E_1)$ este un subspațiu vectorial al lui E'.*

2. Operațiile liniare ca atare, fără condiții topologice, au un rol puțin important în studiul spațiilor vectoriale normate. Definițiile următoare stabilesc trei categorii de operații liniare, după proprietățile lor ca transformări între spații topologice.

Definiția 2. *Fie E și E' două spații vectoriale no mate. O operație liniară T definită pe un subspațiu vectorial E_1 al spațiului E și cu valori în E' se numește continuă în punctul $x_0 \in E_1$ dacă pentru orice șir $\{x_n\} \subset E_1$ convergent către x_0 este verificată relația*

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0).$$

Definiția 3. *Fie E și E' două spații vectoriale normate și T o operație liniară definită pe E și cu valori în E'. Operația T se numește deschisă dacă pentru orice mulțime A deschisă în E, imaginea ei $T(A)$ este o mulțime deschisă în $T(E)$.*

Definiția 4. *Fie E și E' două spații vectoriale normate și T o operație liniară definită pe un subspațiu liniar E_1 al spațiului E și cu valori în spațiul E'. Operația T se numește închisă dacă următoarea condiție este îndeplinită:*

dacă șirul $\{x_n\} \subset E_1$ converge către elementul $x \in E$ și șirul $\{T(x_n)\}$ converge către elementul $y \in E'$, atunci $x \in E_1$ și $T(x) = y$.

3. Vom studia mai întîi operațiile continue.

Următoarea propoziție constituie de fapt o definiție echivalentă cu definiția 2.

Propoziția 2. *Pentru ca o operație T să fie continuă în punctul $x_0 \in E_1 \subset E$, este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta > 0$ astfel* încît

$$\| x - x_0 \| < \eta, \qquad x \in E_1$$

implică

$$\| T(x) - T(x_0) \| < \varepsilon.$$

Observăm că definiția 2 și propoziția 2 nu sînt specifice spațiilor vectoriale și operațiilor liniare, ci sînt valabile în condiții mult mai generale, eventual cu schimbarea notației.

Cadrul în care ne situăm simplifică mult problema operațiilor liniare continue.

Propoziția 3. *O operație liniară T definită pe un spațiu vectorial normat E și continuă într-un punct $x_0 \in E$, este continuă în orice punct al spațiului E.*

Demonstrație. Fie $\{x_n\} \subset E$ și $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in E$.

Atunci $\lim_{n\to\infty} (x_n - x + x_0) = x_0$, deci, operația T fiind continuă în punctul x_0,

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n - x + x_0) = T(x_0).$$

Însă

$$T(x_n - x + x_0) = T(x_n) - T(x) + T(x_0),$$

de unde deducem

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x).$$

Propoziția 3 ne permite să vorbim de o operație liniară continuă în tot domeniul ei de definiție fără însă a mai preciza acest lucru.

Teorema 1. *Pentru ca o operație liniară definită pe spațiul vectorial normat E să fie continuă, este necesar și suficient ca ea să fie mărginită, adică să existe o constantă reală $M \geqslant 0$, astfel încît*

$$\| T(x) \| \leqslant M \| x \|, \quad \textit{pentru orice } x \in E. \tag{1}$$

Demonstrație. Dacă operația T este continuă, există $\varepsilon > 0$, astfel ca $\| y \| < \varepsilon$, $y \in E$, implică $\| T(y) \| < 1$. Însă pentru orice $x \in E$, $x \neq 0$, avem $\left\| \frac{\varepsilon}{2 \| x \|} \cdot x \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, de unde deducem

$$\| T(x) \| = \left\| \frac{2}{\varepsilon} \| x \| \, T\left(\frac{\varepsilon}{2 \| x \|} x \right) \right\| \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \| x \|.$$

Dacă $x = 0$, relația este evidentă.

Invers, dacă operația T este mărginită, ea este evident continuă în punctul $x = 0$ pentru că $T(0) = 0$ și teorema este demonstrată.

În baza acestei teoreme vom spune de multe ori operație liniară mărginită în loc de operație liniară continuă.

Definiția 5. *Marginea inferioară a numerelor M pentru care este verificată relația* (1) *se numește norma operației T și se notează $\| T \|$.*

Propoziția 4. *Norma unei operații liniare continui T definită pe spațiul vectorial E se mai poate defini și astfel:*

$$\| T \| = \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ x \in E}} \| T(x) \|.$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru orice număr M care verifică relația (1) avem

$$\| T(x) \| \leqslant M, \quad \text{dacă} \quad \| x \| < 1,$$

de unde

$$\sup_{\| x \| \leqslant 1} \| T(x) \| \leqslant \inf M = \| T \|. \tag{2}$$

De altă parte, pentru orice $y \in E$, $y \neq 0$,

$$\| T(y) \| = \left\| T\left(\frac{y}{\| y \|} \right) \right\| \cdot \| y \|$$

și cum $\left\| \frac{y}{\| y \|} \right\| = 1$, rezultă

$$\| T(y) \| \leqslant \left(\sup_{\| x \| \leqslant 1} \| T(x) \| \right) \cdot \| y \|,$$

de unde

$$\| T \| \leqslant \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| T(x) \|. \tag{3}$$

Inegalitățile (2) și (3) demonstrează propoziția 4.

Teorema 2. *Fie G o mulțime deschisă nevidă în spațiul vectorial normat E și T o operație liniară definită în E și cu valori în spațiul vectorial normat E_1.*

Dacă

$$\sup_{x \in G} \| T(x) \| < +\infty , \tag{4}$$

atunci operația T este continuă.

Demonstrație. Presupunem că operația T nu este continuă și fie $S(x_0; \delta)$ o sferă inclusă în G. Există un șir $\{x_n\} \subset E$, $x_n \to x_0$ și o constantă c astfel ca

$$\| T(x_n) - T(x_0) \| > c > 0,$$

pentru orice $n \in N$. Dacă notăm

$$z_n = \frac{\delta}{2 \| x_n - x_0 \|} (x_n - x_0) + x_0 ,$$

avem

$$\| z_n - x_0 \| < \delta ,$$

deci $z_n \in S(x_0; \delta)$. Pentru șirul $\{z_n\}$,

$$\| T(z_n) \| \geqslant \left| \frac{\delta}{2 \| x_n - x_0 \|} \| T(x_n - x_0) \| - \| T(x_0) \| \right| >$$

$$> \left| \frac{\delta}{2 \| x_n - x_0 \|} c - \| T(x_0) \| \right|$$

de unde rezultă că

$$\| T(z_n) \| \to \infty \qquad \text{cînd} \qquad n \to \infty$$

ceea ce contrazice ipoteza (4). Teorema este deci demonstrată.

Teorema 3. *Dacă în teorema precedentă, mulțimea G este înlocuită printr-o mulțime A neslabă posedînd proprietatea lui Baire, teorema rămîne valabilă.*

Demonstrație. Rezultă din teorema 2 și propoziția 9, capitolul I, paragraful 2.

Teorema 4. *Fie E un spațiu vectorial normat neslab și T o operație liniară definită pe E și cu valori într-un spațiu vectorial normat E'. Fie F o aplicație a spațiului E în E', continuă pe complementara unei mulțimi slabe $A \subset E$ și astfel că*

$$\| T(x) \| \leqslant \| F(x) \| , \quad \textit{pentru orice} \quad x \in E.$$

În aceste condiții operația T este continuă.

Demonstrație. Fie $x_0 \in \complement A$; deoarece F este continuă în x_0, există o mulțime deschisă $G \subset E$ astfel că $x_0 \in G$ și

$$x \in G \cap \complement A \quad \text{implică} \quad \| F(x) - F(x_0) \| < 1.$$

De aici deducem că pentru $x \in G \cap \complement A$ avem

$$\| T(x) \| \leqslant \| F(x) \| \leqslant \| F(x_0) \| + 1.$$

Deoarece mulțimea $G \cap \complement A$ este neslabă în E (propoziția 8, cap. I, § 2) putem aplica teorema 2.

Teorema 5. *Fie E un spațiu vectorial normat neslab. Dacă operația liniară T, definită pe E și cu valori în E_1 satisface relația*

$$\{x_n\} \subset E, \lim_{n\to\infty} x_n = x \in E \text{ implică } \lim_{n\to\infty} \sup \| T(x_n) \| \geqslant \| T(x) \|$$

atunci T este continuă.

Demonstrație. Fie A_n mulțimea punctelor x din E pentru care $\| T(x) \| \leqslant n$. Mulțimea A_n este închisă în E, deoarece

$$\{x_K\} \subset E, \quad \lim_{K\to\infty} x_K = x \in E$$

implică

$$\| T(x) \| \leqslant \lim_{K\to\infty} \sup \| T(x_K) \| \leqslant n.$$

Însă $E = \bigcup_{n=1} A_n$, de unde rezultă că una cel puțin din mulțimile A_n este nerară, deci conține o mulțime deschisă nevidă. Putem aplica atunci teorema 3 și teorema 5 este demonstrată.

Observație. Dacă spațiile E și E' care intervin în definiția operațiilor liniare și continui sînt spații vectoriale reale (adică pentru ele corpul K al scalarilor se confundă cu R), condiția de omogeneitate apare ca o consecință așa cum se vede din

Propoziția 5. *Fie E și E' două spații vectoriale normate reale. O operație aditivă și continuă definită pe E și cu valori în E' este și omogenă, deci este o operație liniară continuă.*

Demonstrație. Din aditivitate rezultă că dacă m și n sînt numere reale întregi și $n \neq 0$

$$n\, T\left(\frac{m}{n} x\right) = T(mx) = mT(x),$$

deci, pentru orice număr rațional $r \in R$

$$T(rx) = rT(x).$$

Pentru un număr real oarecare $a \in R$, fie $\{r_n\}$ un șir de numere raționale convergent către a.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} T(r_n^x) = T(ax)$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} r_n\, T(x) = T(ax).$$

Însă, de altă parte

$$\lim_{n\to\infty} r_n T(x) = aT(x)$$

și propoziția este demonstrată.

4. Considerăm acum operații liniare continue și deschise.

Teorema 6. *Fie T o operație liniară și continuă definită pe spațiul vectorial normat E și cu valori în spațiul vectorial normat E_1. Operația T este*

deschisă, dacă și numai dacă există o constantă pozitivă c, astfel că pentru orice $y \in T(E)$, există $x \in E$, pentru care $y = T(x)$ și

$$\| x \| \leqslant c \| y \|.$$

Demonstrație. Condiția este suficientă. Să presupunem că ea este îndeplinită și fie G o mulțime deschisă din E, iar $y_0 \in T(G)$.

Atunci $y_0 = T(x_0)$ cu $x_0 \in G$ și $\| x_0 \| \leqslant c \| y_0 \|$. Fie $\delta > 0$ astfel că $S(x_0; \delta) \subset G$. Vom arăta că mulțimea $T(E) \cap S\left(y_0; \frac{\delta}{c}\right)$ este inclusă în $T(G)$.

Într-adevăr, dacă

$$\| y - y_0 \| \leqslant \frac{\delta}{c} \quad \text{și} \quad y \in T(E),$$

atunci $y - y_0 \in T(E)$, deci există $z \in E$, astfel ca $T(z) = y - y_0$ și

$$\| z \| \leqslant c \| y - y_0 \|.$$

De aici rezultă că $x_0 + z \in G$ și

$$T(x_0 + z) = T(x_0) + T(z) = y,$$

deci $y \in T(G)$.

Cum mulțimea $T(E) \cap S\left(y_0; \frac{\delta}{c}\right)$ este o sferă în $T(E)$, cu centrul în y_0, rezultă că mulțimea $T(G)$ este deschisă în $T(E)$.

Condiția este necesară. Presupunînd că ea nu este împlinită, există un șir $\{ y_n \} \subset E$, astfel încît

$$T(x) = y_n \text{ implică } \| x \| > n \| y_n \|, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Punînd

$$y'_n = \frac{1}{\sqrt{n} \| y_n \|} y_n,$$

avem $y'_n \in T(E)$ și

$$\lim_{n \to \infty} y'_n = 0,$$

De altă parte, dacă $T(x) = y'_n$, avem

$$\| x \| > \sqrt{n},$$

de unde rezultă că șirul y'_n este inclus în complementara mulțimii $T(S(0;1))$, unde $S(0;1)$ este sfera deschisă de rază 1 cu centrul în 0, din spațiul E. Deoarece limita acestui șir aparține mulțimii $T(S(0;1))$, deducem că mulțimea $T(S(0;1))$ nu este deschisă. De aici rezultă că operația T nu este deschisă și a doua parte a teoremei este demonstrată.

Teorema 7. *În aceleași condiții ca în teorema precedentă, condiția necesară și suficientă pentru ca operația T să fie deschisă este următorea: dacă $y_n \in T(E)$, $(n = 1, 2,...)$, $y \in T(E)$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ și $y = T(x)$, atunci există un șir $\{x_n\} \subset E$, astfel ca*

$$T(x_n) = y_n, \quad (n = 1, 2,...)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

Demonstrație. Condiția este suficientă. Dacă operația T nu este deschisă, din demonstrația teoremei precedente rezultă că există un șir $\{y'_n\} \subset T(E)$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} y'_n = 0$$

și

$$T(x) = y'_n \quad \text{implică} \quad \|x\| > \sqrt{n},$$

deci condiția nu este satisfăcută.

Condiția este și necesară. Fie $\{y_n\} \subset T(E)$ un șir de elemente și $x \in E$ astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \in T(E), \qquad y = T(x).$$

Atunci, în baza teoremei precedente, există o constantă $c > 0$ și un șir $\{z_n\} \subset E$ astfel ca

$$\|z_n\| \leqslant c\,\|y_n - y\|$$

și

$$T(z_n) = y_n - y.$$

Dacă notăm $x_n = x + z_n$, avem

$$T(x_n) = y_n, \quad (n = 1, 2,...)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Teorema este demonstrată.

Teorema 8. *Fie E, E_1 E_2, spații vectoriale normate T o aplicație liniară continuă și deschisă a lui E în E_1 și T_1 o aplicație a lui E_1 în E_2. Dacă operația T_1T este liniară și continuă, atunci și operația T_1 este liniară și continuă.*

Demonstrație. Fie

$$V = T_1T, \quad y_1 \in E_1, \quad y_2 \in E_1, \quad y_1 = T(x_1),$$
$$y_2 = T(x_2), \quad x_1, x_2 \in E.$$

Atunci

$$T_1'(y_1 + y_2) = V(x_1 + x_2) = V_1(x_1) + V(x_2) = T_1(y_1) + T_1(y_2)$$

deci T_1 este aditivă.

În mod analog se vede că este și omogenă. Fie acum $\{y_n\} \subset E_1$.

și

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Teorema precedentă ne asigură existența unui sir $\{x_n\} \subset E$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{și} \quad T(x_n) = y_n;$$

de aici rezultă

$$\lim_{n\to\infty} T_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} V(x_n) = 0$$

deci operația T_1 este continuă în punctul $O \in E$. Fiind liniară ea este continuă în tot spațiul E.

Teorema 9. *Fie B un spațiu Banach și $S = S(0;1)$ sfera unitate a acestui spațiu.*

Dacă T este o aplicație liniară și continuă a spațiului B într-un spațiu vectorial normat E, atunci mulțimea $T(S)$ este sau rară, sau deschisă.

Demonstrație. Presupunem că $T(S)$ nu este rară. Atunci există un element $x_0 \in S$ și $\delta > 0$ astfel ca

$$S(T(x_0); 2\delta) \subset \overline{T(S)}.$$

Fie $y \in E$ și $\|y\| < 2\delta$ (adică $y \in S(0; 2\delta)$).

Atunci

$$\|y + T(x_0) - T(x_0)\| < 2\delta$$

deci $y + T(x_0) \in T(S)$, de unde $y \in -T(x_0) + \overline{T(S)}$.

De asemenea $\|y\| < \delta$ implică

$$y \in -T\left(\frac{1}{2}x_0\right) + T\left(\frac{1}{2}S\right)$$

de unde

$$y \in \overline{T\left(-\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}S\right)}.$$

Cum însă $-\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}S \subset S$, rezultă relația

$$\|y\| < \delta \text{ implică } y \in \overline{T(S)}. \tag{5}$$

Fie acum un șir de numere reale $\{a_n\}$, astfel ca $\sum_{n=1} a_n < 1$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dacă $\|y\| < \delta a_1$, $y \in E$, atunci

$$\left\|\frac{1}{a_1}y\right\| < \delta,$$

deci din relația (5) deducem

$$\frac{1}{a_1}y \in T(S).$$

Rezultă că există $x_1 \in S$, astfel încît

$$\left\|\frac{1}{a_1}y - T(x_1)\right\| < \delta\frac{a_2}{a},$$

deci

$$\|y - a_1 T(x_1)\| < \delta a_2.$$

Presupunînd că există șirul finit $\{ x_i \}_{i \leqslant i \leqslant n}$ de elemente din S, astfel ca

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) \right\| < \delta a_{n+1} \tag{6}$$

vom arăta că există și elementul $x_{n+1} \in S$, astfel ca

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n+1} a_i T(x_i) \right\| < \delta a_{n+2}. \tag{7}$$

Într-adevăr, din relația

$$\left\| \frac{1}{a_{n+1}} \left(y - \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) \right) \right\| < \delta$$

și din relația (6), rezultă că există elementul x_{n+1}, astfel ca

$$\left\| \frac{1}{a_{n+1}} \left(y - \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) \right) - T(x_{n+1}) \right\| < \delta \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

deci x_{n+1} verifică relația (7).

Am arătat astfel că există un șir $\{ x_1, x_2 \ldots \}$ care verifică relația (6) pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$ Seria

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

este convergentă, pentru că

$$\left\| \sum_{i=m}^{m+p} a_i x_i \right\| \leqslant \sum_{i=m}^{m+p} a_i.$$

Fie $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Avem

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i < 1$$

și, ținînd seamă de relația (6),

$$y = T(x),$$

deci

$$y \in T(S).$$

Dacă notăm cu S' sfera unitate din spațiul E', din considerațiile precedente rezultă că

$$T(S) \supset \delta a_1 S'.$$

Fie acum x_0 un element oarecare din S și $y_0 = T(x_0)$. Atunci există $c > 0$ astfel ca

$$x_0 + cS \subset S,$$

deci

$$T(S) \supset T(x_0) + cT(S) \supset y_0 + c\delta a_1 S',$$

de unde se vede că y_0 aparține interiorului mulțimii $T(S)$ și prin urmare $T(S)$ este mulțime deschisă.

Teorema este demonstrată.

T e o r e m a 10. *Fie B un spațiu Banach, E un spațiu vectorial normat și T o aplicație liniară și continuă a spațiului B în E.*

Dacă $T(B)$ este neslabă în E, atunci aplicația T este deschisă și $T(B)=E$.

D e m o n s t r a ț i e. Fie S sfera unitate din B.

Deoarece $T(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nS) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(S)$ este de a doua categorie, rezultă că și $T(S)$ este de a doua categorie. Din teorema precedentă deducem atunci că $T(S)$ este mulțime deschisă în E și $T(B) = E$. Ținînd seama de definiția operațiilor deschise, rezultă că T este deschisă.

T e o r e m a 11. *Fie B un spațiu Banach, E un spațiu vectorial normat și T o aplicație liniară, continuă și deschisă a lui B în E. Atunci și $T(B)$ este un spațiu Banach.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\{y_n\} \subset T(B)$ un șir Cauchy.

Putem extrage un subșir $y'_n (n = 0, 1, 2\ldots)$ astfel ca

$$\| y'_n - y'_{n-1} \| \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Datorită teoremei 6, există o constantă $c > 0$ și un șir $\{z_n\} \subset B$, astfel ca

$$T(z_n) = y'_n - y'_{n-1}$$

și

$$\| z_n \| \leqslant c \| y'_n - y'_{n-1} \| \leqslant \frac{c}{2^n}, \quad (n = 1, 2,\ldots).$$

Fie $x_0 \in E$ și $T(x_0) = y'_0$. Pentru fiecare $n = 1, 2\ldots$ punem

$$x_n = x_0 + z_1 + \ldots + z_n.$$

Atunci $T(x_n) = y_n$ și $\{x_n\}$ este un șir Cauchy în spațiul B. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ și } T(x) = y,$$

atunci

$$y \in T(B) \text{ și } \lim_{n\to\infty} y'_n = y,$$

deci și

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

și teorema este demonstrată.

Din teoremele 9, 10, 11, rezultă imediat

T e o r e m a 12. *Fie B un spațiu Banach, E un spațiu vectorial normat și T o aplicație liniară a lui B în E. Condiția necesară și suficientă*

ca $T(B)$ să fie complet este ca operația T să fie deschisă. Dacă această condiție nu este îndeplinită, $T(B)$ este o mulțime slabă.

5. Aplicația canonică a unui spațiu vectorial normat pe un spațiu cît are următoarele proprietăți :

Fie E un spațiu vectorial normat, G un subspațiu vectorial închis al său și E/G spațiul cît corespunzător.

Teorema 13. *Aplicația canonică a spațiului E pe E/G, care face ca fiecărui element $x \in E$ să-i corespundă clasa $x + G = \dot{x} \in E/G$ este o operație liniară, continuă și deschisă de normă* 1.

Demonstrație. Deoarece $x \in \dot{x}$

$$\|\dot{x}\| = \inf_{y \in \dot{x}} \|y\| \leqslant \|x\|,$$

deci aplicația este continuă și are norma 1. Dacă $a > 1$, există $y \in \dot{x}$ cu $\|y\| \leqslant |a| \|\dot{x}\|$, de unde rezultă că este și deschisă și are norma chiar 1.

Din teorema 13 și teorema 8, deducem

Teorema 14. *Fie E și E_1 două spații vectoriale normate, T o operație liniară continuă definită pe E și cu valori în E_1 și $G = T^{-1}(0)$.*

Dacă $x_1 \in \dot{x}$, $x_2 \in \dot{x}$, $\dot{x} \in E/G$, atunci $T(x_1) = T(x_2)$.

Pentru $\dot{x} \in E/G$, punem $T_1(\dot{x}) = T(x)$ cu $x \in \dot{x}$. Atunci T_1 este o aplicație biunivocă a lui E/G în E_1. Dacă T este deschisă, atunci T_1 este un izomorfism algebrico-topologic.

§ 2. Inversiunea operațiilor liniare

1. Rezolvarea ecuațiilor liniare este mult mai complicată în spațiile vectoriale normate oarecare decît în spațiile finit-dimensionale.

Definiție. *Fie E și E' două spații vectoriale și T o operație liniară definită pe E și cu valori în E'. Spunem că T admite o operație inversă atunci cînd corespondența între E și $T(E)$ este biunivocă.*

Dacă $x \in E$ și $y = T(x) \in T(E)$, notăm $x = T^{-1}(y)$. Operația T^{-1} astfel definită pe $T(E)$ și cu valori în E se numește inversa operației T.

Propoziția 1. *Pentru ca operația liniară T să admită o operație inversă este necesar și suficient ca să fie îndeplinită condiția*

$$T(x) = 0 \quad \text{dacă și numai dacă } x = 0.$$

Demonstrația acestei propoziții este evidentă. De asemenea este imediată

Propoziția 2. *Inversa unei operații liniare este o operație liniară.*

2. În spațiile vectoriale normate este important ca inversa unei operații să fie continuă.

Teorema 1. *Fie E și E' două spații vectoriale normate și T o operație liniară definită pe un subspațiu vectorial E_1 al spațiului E și cu valori în E'.*

Pentru ca operația T să aibă o inversă continuă, este necesar și suficient să existe o constantă $m > 0$ astfel ca

$$\| T(x) \| \geqslant m \| x \|,$$

pentru toți $x \in E_1$. Marginea inferioară a numerelor $1/m$ este norma operației T^{-1}.

Demonstrație. Dacă inversa T^{-1} există și este continuă, există un număr $M > 0$ astfel ca

$$\| x \| = \| T^{-1}(y) \| \leqslant M \| y \|, \text{ pentru orice } y \in T(E_1),$$

deci

$$\| T(x) \| = \| y \| \geqslant \frac{1}{M} \| x \|.$$

Invers, dacă

$$\| T(x) \| \geqslant m \| x \|, \text{ pentru orice } x \in E_1,$$

atunci $T(x) = 0$ implică $x = 0$, deci T^{-1} există și

$$\| T^{-1}(y) \| \leqslant \frac{1}{m} \| y \|,$$

de unde se vede că T^{-1} este continuă și $\inf \frac{1}{m}$ este norma ei.

Teorema 2. *Dacă operația T admite inversă continuă și dacă mulțimea de definiție E_1 este închisă, atunci și imaginea sa $T(E_1)$ este închisă.*

Demonstrație. Rezultă imediat din faptul că $T(E_1)$ este imaginea inversă prin funcția continuă T^{-1} a mulțimii închise E_1.

Din teorema 1 și teoremele 6 și 10, paragraful 1, rezultă

Teorema 3. *Fie E și E_1 două spații Banach. Dacă operația liniară T este continuă și biunivocă, iar $T(E) = E_1$, atunci există operația T^{-1}, liniară și continuă.*

§ 3. Criterii de izomorfism algebric și topologic

1. Din definiția izomorfismului algebric și topologic între două spații vectoriale normate (definiția 5, cap. I, § 2) reiese clar

Propoziție. *Pentru ca două spații vectoriale normate E și E' să fie izomorfe din punct de vedere algebric și topologic, este necesar și suficient să existe o operație liniară continuă T definită pe E având contradomeniu întreg spațiul E' și admițând inversă continuă.*

Aplicînd acum teorema 1, paragraful 1 și teorema 1, paragraful 2, găsim următorul criteriu.

Teorema 1. *Pentru ca două spații vectoriale normate E și E' să fie izomorfe din punct de vedere topologic și algebric, este necesar și suficient să existe o operație liniară T, definită pe E și avînd contradomeniu întreg spațiul E' și două constante pozitive M, m, astfel ca*

$$m \| x \| \leqslant \| T(x) \| \leqslant M \| x \|,$$

pentru orice $x \in E$.

De asemenea, ținînd seama și de teorema 6, paragraful 1, se mai poate enunța

Teorema 2. *Pentru ca o operaţie liniară şi continuă T definită pe un spaţiu vectorial normat şi avînd contradomeniu, spaţiul vectorial normat E', să fie un izomorfism algebric şi topologic, este necesar şi suficient ca T să fie o operaţie deschisă.*

Dacă spaţiile E şi E' se confundă ca spaţii vectoriale însă au norme diferite, teorema 1 ne dă următorul criteriu de echivalenţă topologică a celor două norme.

Teorema 3. *Fie E un spaţiu vectorial normat cu două norme diferite, $\|x\|^{(1)}$ şi $\|x\|^{(2)}$.*

Pentru ca aceste norme să inducă aceeaşi topologie în E este necesar şi suficient să existe două constante pozitive M şi m astfel ca

$$m\|x\|^{(1)} \leqslant \|x\|^{(2)} \leqslant M\|x\|^{(1)},$$

pentru orice $x \in E$.

Demonstraţie. Este suficient să luăm în teorema 1 drept operaţie T, operaţia identitate I a spaţiului E.

2. Din teorema 11, § 1, sau din teorema 1 a acestui paragraf deducem

Teorema 4. *Dacă B este un spaţiu Banach şi E un spaţiu vectorial normat, izomorf algebric şi topologic cu B, atunci şi E este un spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Din condiţia de izomorfism rezultă imediat că E este un spaţiu complet, dacă B este complet.

Într-adevăr, fie T o aplicaţie liniară biunivocă şi bicontinuă a lui B pe E şi $\{y_n\}$ un şir Cauchy de elemente din E. Elementele y_n $(n=1,2,\ldots)$ sînt de forma $T(x_n)$ cu $x_n \in B$ $(n = 1,2,\ldots)$.

Deoarece

$$\|x_n - x_m\| \leqslant \frac{1}{m}\|T(x_n) - T(x_m)\| = \frac{1}{m}\|y_n - y_m\|$$

rezultă că şi $\{x_n\}$ este un şir Cauchy în B.

Spaţiul B fiind complet, există elementul $x \in B$, astfel ca

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Atunci

$$y = T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n$$

şi teorema este demonstrată.

3. Tot teorema 1 ne dă posibilitatea să caracterizăm spaţiile vectoriale normate cu un număr finit de dimensiuni.

Teorema 5. *Dacă E este un spaţiu vectorial normat cu un număr finit de dimensiuni, atunci E este complet şi izomorf, din punct de vedere algebric şi topologic, cu un spaţiu euclidian.*

Demonstraţie. Fie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ baza algebrică finită a spaţiului E şi $\{y_k\} \subset E$ un şir Cauchy de elemente,

$$y_k = a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n.$$

Din

$$\|y_k - y_j\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(a_{ki} - a_{ji})x_i\right\| \to 0, \qquad \text{pentru } k, j \to \infty$$

rezultă, pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$\|a_{ki} - a_{ji}\| \to 0 \qquad \text{cînd } k, j \to \infty,$$

deoarece elementele $x_1, \ldots, x_n$ sînt liniar independente.

Atunci există

$$\lim_{k \to \infty} a_{ki} = a_i, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Elementul

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

aparține spațiului E și

$$\lim_{k \to \infty} \|y_k - x\| = 0,$$

deoarece

$$\|y_k - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_{ki} - a_i)\, x_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{ki} - a_i| \, \|x_i\|.$$

Am demonstrat deci că E este complet.

A doua afirmație a teoremei rezultă din faptul că spațiul E poate fi normat și prin expresia

$$\|x\|^{(1)} = (|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)^{1/2}$$

dacă

$$x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n.$$

Întrucît limita unui șir convergent nu depinde decît de coordonatele elementelor în raport cu baza $\{x_1, \ldots, x_n\}$, rezultă că topologia dată de norma $\|x\|^{(1)}$ este echivalentă cu cea dată de norma $\|x\|$.

De altă parte, este evident că E normat cu $\|x\|^{(1)}$ este echivalent algebric și în normă cu spațiul euclidian cu n dimensiuni .

Corolar. *Orice subspațiu vectorial normat cu un număr finit de dimensiuni al unui spațiu vectorial normat E, este închis în E.*

Teorema 6. *Într-un spațiu vectorial normat cu un număr finit de dimensiuni, orice mulțime mărginită este relativ compactă.*

Demonstrație. În baza teoremei de echivalență a normelor, orice mulțime mărginită în E este mărginită și față de norma euclidiană $\|x\|^{(1)}$, deci relativ compactă față de această normă.

Cum proprietatea „relativ compactă" se păstrează prin echivalența topologică, teorema este demonstrată.

Și reciproca acestei teoreme este valabilă.

Teorema 7. *Dacă închiderea oricărei părți mărginite a unui spațiu vectorial normat E este compactă, atunci E este un spațiu Banach cu un număr finit de dimensiuni.*

Demonstrație. Presupunem contrariul, adică existența unui șir infinit $\{x_n\} \subset E$ de elemente liniar independente. Fie E_k subspațiul liniar cu k dimensiuni generat de elementele $x_1, \ldots, x_n$ (mulțimea combinațiilor liniare făcute cu aceste elemente). Pentru orice $k = 1, 2, \ldots$, există un element $y_k \in E_{k+1}$, astfel încît

$$\|y_k\| = 1 \quad \text{și} \quad \|y_k - x\| \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{pentru orice } x \in E_k.$$

Şirul $\{y_k\}$ fiind mărginit are, prin ipoteză, un punct de acumulare. Dar acest lucru este imposibil, deoarece

$$\|y_k - y_j\| \geqslant \frac{1}{2}, \text{ dacă } j \neq k.$$

Rezultă că şirul $\{x_n\}$ nu poate avea decît un număr finit de elemente şi deci teorema este demonstrată.

§ 4. Şiruri de operaţii liniare

1. Pentru şirurile de operaţii liniare se pot defini mai multe tipuri de convergenţă.

Definiţia 1. *Fie $\{T_n\}$ un şir de operaţii liniare definite pe un spaţiu vectorial normat E şi cu valori într-un spaţiu vectorial normat E.*

Spunem că şirul $\{T_n\}$ converge punctual către operaţia T pe mulţimea $M \subset E$, dacă pentru orice, $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x).$$

Definiţia 2. *In aceleaşi condiţii ca în definiţia prccedentă, spunem că şirul $\{T_n\}$ converge uniform către T pe mulţimea M, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel încît $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ implică*

$$\|T_n(x) - T(x)\| < \varepsilon$$

oricare ar fi $x \in M$.

Pentru operaţiile liniare continue se introducc şi o altă relaţie de convergenţă prin

Definiţia 3. *Fie $\{T_n\}$ un şir de operaţii liniare continui definite pe spaţiul vectorial normat E şi cu valori în spaţiul vectorial normat E'. Şirul $\{T_n\}$ converge în normă către operaţia liniară continuă T, definită pe E şi cu valori în E', dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

2. Obiectul acestui aliniat este studiul cîtorva proprietăţi importante ale convergenţei punctuale.

Teorema 1. *Fie E un spaţiu vectorial normat B, un spaţiu Banach şi S o sferă inclusă în E.*

Dacă şirul $\{T_n\}$ de operaţii liniare şi mărginite (continue), definite pe E şi cu valori în B, converge punctual pe o mulţime M densă în S şi dacă şirul normelor $\{\|T_n\|\}$ este mărginit,

$$\|T_n\| \leqslant C \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

atunci şirul operaţiilor $\{T_n\}$ converge pentru orice $x \in E$ şi limita astfel obţinută este o operaţie liniară mărginită, T, cu norma $\leqslant C$.

Demonstraţie. Arătăm mai întîi convergenţa în sfera S. Fie $x_0 \in S$; există atunci un şir $\{x_n\} \subset M$, astfel că $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Pentru orice numere naturale n, p, q este verificată inegalitatea

$$\| T_p(x_0) - T_q(x_0) \| \leqslant \| T_p(x_0) - T_p(x_n) \| + \| T_p(x_n) - T_q(x_n) \| + \| T_q(x_n) - T_q(x_0) \| \leqslant$$
$$\leqslant 2C \| x_n - x_0 \| + \| T_p(x_n) - T_q(x_n) \| .$$

Fie $\varepsilon > 0$; există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$\| x_0 - x_{n_0} \| < \varepsilon.$$

Punctul x_{n_0} aparținînd mulțimii M, unde șirul $\{T_p(x)\}$ este convergent, există un număr natural $p_0\,(n_0(\varepsilon), \varepsilon)$, astfel ca

$$\| T_p(x_{n_0}) - T_q(x_{n_0}) \| < \varepsilon, \text{ dacă } p, q \geqslant p_0.$$

Deci, dacă p, $q \geqslant p_0$,

$$\| T_p(x_0) - T_q(x_0) \| \leqslant (2C + 1)\,\varepsilon.$$

De aici rezultă că șirul $\{T_p(x_0)\}$ este un șir Cauchy pentru orice $x_0 \in S$. Spațiul B fiind complet, șirul $\{T_p(x_0)\}$ converge către un element $T(x_0) \in B$.

Fie acum x un punct oarecare din E, y_0 centrul sferei S și r raza acestei sfere. Dacă numărul $a \in K$ este astfel ales încît $|a| < \frac{r}{\| x \|}$, atunci

$$\| y_0 - (y_0 + ax) \| = \| ax \| < r,$$

deci $y_0 + ax \in S$ și $\{T_p(y_0 + ax)\}$ este un șir convergent. Însă

$$T_p(y_0 + ax) = T_p(y_0) + aT_p(x),$$

de unde rezultă că și $\{T_p(x)\}$ este un șir convergent.

Dacă notăm

$$T(x) = \lim_{p \to \infty} T_p(x),$$

T este o operație liniară.

Din inegalitatea $\| T(x) \| \leqslant \| T(x) - T_p(x) \| + \| T_p(x) \|$ rezultă că T este mărginită și

$$\| T \| \leqslant C.$$

Următoarea teoremă o enunțăm într-un cadru mai general, pentru că nu cere nimic din specificul spațiilor vectoriale.

Teorema 2. *Fie $\{f_n\}$ un șir de funcții reale nenegative definite într-un spațiu metric E, astfel ca*

$$\limsup_{n \to \infty} f_n(x) < +\infty,$$

pentru orice punct x al unei părți $A \subset E$ care nu este slabă (adică de categoria a doua). Atunci există o sferă $S \subset E$ și un număr M, astfel ca

$$f_n(x) \leqslant M,$$

pentru orice punct $x \in S$ și orice n.

Demonstrație. Fie A_k mulțimea punctelor $x \in A$, astfel ca $f_n(x) \leqslant k$, pentru orice $n \in N$, adică

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([0, k]).$$

Funcțiile f_n fiind continue, mulțimile

$$f_n^{-1}([0, k])$$

sînt închise, deci A_k este o mulțime închisă.

Vom arăta că

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Într-adevăr, fie $a \in A$; atunci

$$\limsup_{n \to \infty} f_n(a) = b < +\infty$$

deci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr natural $n_0(\varepsilon)$ astfel ca

$$f_n(a) \leqslant b + \varepsilon,$$

pentru orice $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Fie $f_{n_1}(a)$ cel mai mare dintre numerele $\{f_n(a)\}_{1 \leqslant n < n_0(\varepsilon)}$ și $k \geqslant f_{n_1}(a)$.

Rezultă

$$f_n(a) \leqslant k, \text{ pentru orice } n \in N$$

și prin urmare $a \in A_k$, de unde incluziunea de mai sus este dovedită.

Mulțimea A nefind slabă, rezultă că

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

nu este slabă. Există deci un indice M, astfel ca A_M să nu fie slabă. Mulțimea A_M fiind închisă conține o sferă S, căci în caz contrar ar fi rară și deci slabă.

Pentru toate punctele $x \in S$, avem

$$f_n(x) \leqslant M, \text{ oricare ar fi } n \in N$$

deci teorema este demonstrată.

În cazul spațiilor vectoriale normate complete, aplicarea acestei teoreme ne conduce la următoarea teoremă de o importanță fundamentală.

Teorema 3. *Dacă $\{T_\alpha(x)\}$ este o mulțime de operații liniare continue definite pe un spațiu Banach B și $\sup_\alpha \| T_\alpha(x) \| < +\infty$ pentru orice x, atunci mulțimea $\{\| T_\alpha \|\}$ este mărginită.*

Demonstrație. Considerăm mai întîi cazul unui șir $\{T_n\}$.

Se știe din topologia generală că orice spațiu metric complet este de categoria a doua (adică nu este slab), deci spațiul B satisface condiția teoremei precedente.

Funcționalele $\| T_n(x) \|$ pentru n fix sînt nenegative și continue, deoarece

$$\big| \| T_n(x') \| - \| T_n(x) \| \big| \leqslant \| T_n(x' - x) \| \leqslant \| T_n \| \, \| x' - x \|,$$

prin urmare, în baza teoremei precedente, există o sferă S și un număr K, astfel ca

$$\| T_n(x) \| \leqslant K,$$

pentru orice $x \in S$ și orice $n \in N$.

Fie y_0 centrul sferei S și r raza ei.
Dacă $\|x\| < 1$, atunci

$$y = y_0 - rx \in S$$

deoarece

$$\|y - y_0\| < r$$

deci

$$\|T_n(x)\| = \frac{1}{r}\|T_n(y - y_0)\| \leqslant \frac{1}{r}\|T_n(y)\| + \frac{1}{r}\|T_n(y_0)\| \leqslant \frac{2K}{r}.$$

Considerînd apoi cazul unei mulțimi nenumărabile $\{T_\alpha\}$ și presupunînd că mulțimea normelor $\{\|T_\alpha\|\}$ nu este mărginită, putem extrage un șir $\{T_n\} \subset \{T_\alpha\}$, astfel încît $\|T_n\| \to \infty$. Însă acest lucru este în contradicție cu cazul precedent, pentru că

$$\sup_n \|T_n(x)\| \leqslant \sup_\alpha \|T_\alpha(x)\|$$

implică

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty.$$

O consecință imediată a teoremei 3 este

Teorema 4. *Fie $\{T_n\}$ un șir de operații liniare continue definite pe spațiul Banach B și cu valori într-un spațiu vectorial normat E.*

Dacă șirul $\{T_n(x)\}$ este un șir Cauchy pentru orice $x \in B$, atunci șirul normelor $\{\|T_n\|\}$ este mărginit.

Demonstrație. Pentru orice $x \in B$ există un număr natural n_0, astfel încît

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant 1, \quad \text{dacă } n,\ m \geqslant n_0.$$

În particular

$$\|T_n(x) - T_{n_0}(x)\| \leqslant 1, \quad \text{dacă } n \geqslant n_0.$$

De aici deducem

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n(x) - T_{n_0}(x)\| + \|T_{n_0}(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \|T_{n_0}(x)\| < +\infty.$$

Atunci putem aplica teorema precedentă și teorema 4 este demonstrată.

Teorema 4 se poate însă deduce și din teorema următoare, care este generalizarea ei la spațiile vectoriale normate oarecare, dar care se demonstrează pe altă cale.

Teorema 5. *Fie $\{T_n\}$ un șir de operații liniare continue definite pe spațiul vectorial normat E și cu valori în spațiul vectorial normat E'. Dacă șirul $\{T_n(x)\}$ este un șir Cauchy pentru orice $x \in E$, atunci șirul normelor $\{\|T_n\|\}$ este mărginit*

Demonstrație. Presupunem contrariul. Atunci mulțimea $\{T_n(x)\}$ este nemărginită pe orice sferă închisă. Într-adevăr, dacă

$$\|T_n(x)\| \leqslant M,$$

pentru toți n și toți x dintr-o sferă închisă $\bar{S}(x_0; r)$, atunci, pentru orice $y \in E$, elementul

$$y' = \frac{r}{\|y\|} y + x$$

aparține sferei $\bar{S}(x_0; r)$, deci

$$\| T_n(y') \| \leqslant M.$$

De aici deducem

$$\frac{r}{\|y\|} \| T_n(y) \| - \| T_n(x_0) \| \leqslant \left\| \frac{r}{\|y\|} T_n(y) + T_n(x_0) \right\| \leqslant M$$

deci

$$\| T_n(y) \| \leqslant \frac{M + \| T_n(x_0) \|}{r} \| y \|.$$

Însă șirul $\{T_n(x_0)\}$ este mărginit, de unde rezultă că putem scrie

$$\| (T_n(y) \| \leqslant M_1 \| y \|$$

și prin urmare

$$\| T_n \| \leqslant M_1, \quad (n = 1,2, \ldots)$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Deci șirul $\{\| T_n(x) \|\}$ este nemărginit pe sfera $\bar{S}(x_0; r)$. Atunci există un întreg n_1 și un punct $x_1 \in \bar{S}(x_0; r)$, astfel încît

$$\| T_{n_1}(x_1) \| > 1.$$

Deoarece operația T_{n_1} este continuă, inegalitatea precedentă este verificată într-o sferă $\bar{S}(x_1; r_1) \subset \bar{S}(x_0; r)$.

Șirul $\{\| T_n(x) \|\}$ fiind nemărginit și pe sfera $\bar{S}(x_1; r_1)$, există un întreg n_2 și un element $x_2 \in \bar{S}(x_1; r_1)$, astfel ca

$$\| T_{n_2}(x_2) \| > 2.$$

În baza continuității operației T_n, această ultimă inegalitate este satisfăcută într-o sferă $\bar{S}(x_2; r_2) \subset \bar{S}(x_1; r_1)$.

Continuînd astfel, putem presupune că $r_n \to 0$, și deducem că există un punct $\bar{x}$, aparținînd intersecției sferelor închise $\bar{S}(x_n; r_n)$, astfel încît

$$\| T_{n_k}(\bar{x}) \| \geqslant K,$$

ceea ce contrazice ipoteza că șirul $\{T_n(x)\}$ converge în fiecare punct $x \in E$.

Teorema este astfel demonstrată.

§ 5. Funcționale liniare pozitive

1. Pentru spațiile vectoriale normate oarecare dăm deocamdată numai

D e f i n i ț i a 1. *O operație liniară definită pe spațiul vectorial E și cu valori în corpul K al scalarilor se numește funcțională liniară, sau formă liniară.*

Mulțimea funcționalelor liniare continue are un rol foarte important în teoria spațiilor vectoriale normate, așa cum vom vedea în capitolele care vor urma.

2. Considerăm acum numai spații vectoriale reale.

În spațiile vectoriale ordonate distingem o categorie de funcționale liniare cu proprietăți deosebite, anume funcționalele liniare pozitive.

Definiția 2. *Fie E un spațiu vectorial ordonat. Funcționala liniară f definită pe E se numește pozitivă și se notează $f \geqslant 0$, dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E_+$ și strict pozitivă dacă este pozitivă și $f(x_0) > 0$ cel puțin pentru un element $x_0 \in E_+$.*

Teoremă. *Fie E un spațiu vectorial normat ordonat și int $E_+ \neq \emptyset$. Orice funcțională aditivă f definită pe E, care îndeplinește condiția*

$$f(x) \geqslant 0, \text{ pentru orice } x \in E_+$$

este o funcțională liniară continuă pozitivă.

Demonstrație. Fie $u \in \operatorname{int} E_+$; există atunci un număr rațional $r > 0$, astfel încît

$$S(u; r) \subset E_+.$$

Dacă $\|x\| \leqslant 1$, avem

$$u \pm rx \geqslant 0$$

și, în baza aditivității funcționalei f,

$$f(u) \pm rf(x) \geqslant 0.$$

De aici rezultă

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{r} f(u), \text{ pentru } \|x\| \leqslant 1,$$

adică funcționala f este mărginită pe sfera unitate, deci este continuă.

Următoarea propoziție ne arată că o funcțională care nu se anulează cel puțin într-un punct din int E_+, nu se anulează în nici un punct din int E_+.

Propoziție. *Fie E un spațiu vectorial normat ordonat și int $E_+ \neq \emptyset$. Dacă f este o funcțională liniară continuă pozitivă și $S(u; r) \subset E_+$, atunci*

$$f(u) \geqslant r\|f\|$$

Demonstrație. Rezultă din relația

$$f(u) \geqslant r \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = r\|f\|$$

demonstrată în teorema precedentă.

§ 6. Operații liniare cu valori într-o latice vectorială

Proprietățile funcționalelor pozitive se pot extinde la o categorie mai vastă de operații.

Definiție. *Fie E un spațiu vectorial ordonat și E' o latice vectorială. Operația liniară T definită pe E și cu valori în E' se numește*

pozitivă și se notează $T \geqslant 0$, *dacă* $T(x) \geqslant 0$ *pentru orice* $x \in E_+$ *și strict pozitivă dacă este pozitivă și* $T(x_0) \neq 0$ *cel puțin pentru un element* $x_0 \in E_+$.

Teoremă. *Fie* E *un spațiu vectorial normat ordonat cu* $\text{int } E_+ \neq \emptyset$, *iar* E' *o latice vectorială normată cu norma definită la capitolul I, paragraful 4.*

Orice operație aditivă T *definită pe* E *și cu valori în* E', *care îndeplinește condiția*

$$T(x) \geqslant 0, \text{ pentru orice } x \in E_+$$

este o operație liniară continuă nenegativă.

Demonstrație. La fel ca pentru teorema din paragraful 5 găsim existența unui element $u \in \text{int } E_+$ și a unui număr rațional $r > 0$, astfel încît

$$| T(x) | \leqslant \frac{1}{r} T(u), \text{ pentru } \| x \| \leqslant 1.$$

De aici deducem

$$\| T(x) \| \leqslant \frac{1}{r} \| T(u) \|, \text{ pentru } \| x \| \leqslant 1$$

adică operația T este mărginită pe sfera unitate, deci este continuă.

§ 7. Operații multiliniare continue

1. Liniaritatea se poate extinde la funcțiile de mai multe variabile.

Definiția 1. *Fie* $E_1, E_2, \ldots, E_n$ *un număr finit de spații vectoriale și*

$$E = \bigtimes_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$$

produsul lor cartezian.

O operație U *definită pe* E *și cu valori într-un spațiu vectorial* F *este o funcție de* n *variabile* $x_1, x_2 \ldots x_n$, *unde* $x_i \in E_i (i = 1, \ldots, n)$.

Dacă această operație este liniară în raport cu fiecare variabilă în parte, atunci ea se numește o operație multiliniară.

Operația U este deci multiliniară dacă satisface următoarele condiții:

$$U(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i' + x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_n) = U(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) + U(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i'', x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{1}$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$;

$$U(x_1, \ldots, x_{i-1}, ax_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = aU(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{2}$$

pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ și $a \in K$.

2. Considerăm acum produsul tensorial al spațiilor $E_1, E_2, \ldots, E_n$,

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n.$$

Folosim, pentru uniformitatea scrierii, notații puțin diferite de cele de la capitolul I.

Produsul tensorial este mulțimea claselor de echivalență (după relația de echivalență dată la cap. I, § 6, definiția 2), în mulțimea expresiilor de forma

$$\sum_{j=1}^{m} x_1^{(j)} \times x_2^{(j)} \times \ldots \times x_n^{(j)}. \tag{3}$$

Unei operații multiliniare îi corespunde în mod natural o operație liniară definită pe produsul tensorial.

Definiția 2. *Fie U o operație multiliniară definită pe spațiile vectoriale $E_1, \ldots, E_n$ și cu valori în spațiul vectorial F. Numim prelungirea operației U pe produsul tensorial*

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n,$$

operația $\overline{U}$ definită prin

$$\overline{U}\left(\sum_{j=1}^{m} x_1^{(j)} \times x_2^{(j)} \times \ldots \times x_n^{(j)}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} U\left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right).$$

Operația $\overline{U}$ este bine definită, deoarece relația

$$\sum_{j=1}^{m} x_1^{(j)} \times \ldots \times x_n^{(j)} \simeq \sum_{k=1}^{l} x_1^{(k)} \times \ldots \times x_n^{(k)}$$

implică, evident,

$$\overline{U}\left(\sum_{j=1}^{m} x_1^{(j)} \times \ldots \times x_n^{(j)}\right) = \overline{U}\left(\sum_{k=1}^{l} x_1^{(k)} \times \ldots \times x_n^{(k)}\right).$$

De asemenea, este evident că $\overline{U}$ este o operație liniară. Putem enunța astfel

Propoziția 1. *Prelungirea $\overline{U}$ a unei operații multiliniare U este o operație liniară definită pe produsul tensorial. Invers, restricția oricărei operații liniare, definite pe produsul cartezian, la clasele de echivaleță conținînd expresii de forma*

$$x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$$

este o operație multiliniară.

3. Vom defini acum continuitatea unei operații multiliniare în raport cu topologia produsului cartezian (vezi cap. I, § 6).

Definiția 3. *Fie $E_1, E_2, \ldots, E_n$ și F spații vectoriale normate. Presupunem că produsul cartezian $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} E_i$ este normat prin expresia*

$$\|x\|^{(\infty)} = \max\left(\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_n\|\right). \tag{4}$$

Operația multiliniară U se numește continuă, dacă este continuă în topologia dată de această normă.

Se poate da și pentru operațiile multiliniare, o condiție necesară și suficientă pentru continuitate, analogă cu aceea dată pentru operațiile liniare.

T e o r e m ă. *Pentru ca operația multiliniară U să fie continuă, este necesar și suficient să existe o constantă $M \geqslant 0$, astfel ca*

$$\| U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \leqslant M \| x_1 \| \cdot \| x_2 \| \ldots \| x_n \|,$$

pentru orice $x_i \in E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

D e m o n s t r a ț i e. Condiția este necesară. Dacă operația U este continuă în punctul $(0, 0, \ldots, 0)$ există un număr $r > 0$, astfel încît $\| x_i \| \leqslant r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ implică

$$\| U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \| \leqslant 1.$$

Fie $a \in K$ un număr astfel ca $0 < |a| < 1$.

Pentru orice punct $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} E_i$ astfel ca $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ există n numere întregi pozitive k_i, astfel încît

$$r |a| < \| a^{k_i} x_i \| \leqslant r,$$

deci

$$|a|^{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \| U(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant 1.$$

Pe de altă parte avem

$$\frac{1}{|a|^{k_i}} \leqslant \frac{1}{r|a|} \| x_i \|,$$

de unde

$$\| U(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \frac{1}{(r|a|^n)} \| x_1 \| \cdot \| x_2 \| \ldots \| x_n \|.$$

Condiția este și suficientă. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ un punct oarecare din $E = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} E_i$. Avem

$$U(y_1, \ldots, y_n) - U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} U(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

deci, dacă

$$\| y_i - x_i \| \leqslant r, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

rezultă

$$\| U(y_1, \ldots, y_n) - U(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant nMr \left[r^{n-1} + \max \left(\| x_1 \|, \ldots, \| x_n \| \right) \right] \qquad (5)$$

deoarece

$$\| U(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i - x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant Mr \left(\| x_1 \| + r \right) \left(\| x_2 \| + r \right) \ldots \left(\| x_{i-1} \| + r \right) \left(\| x_{i+1} \| + r \right) \ldots \left(\| x_n \| + r \right).$$

Al doilea termen al inegalității (5) tinde către 0 o dată cu r, deci operația U este continuă în punctul $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Definiția 4. *Fie $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o operație multiliniară continuă. Numim norma operației U expresia*

$$\| U \| = \sup \frac{\| U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \|}{\| x_1 \| \cdot \| x_2 \| \ldots \| x_n \|},$$

marginea superioară fiind luată pentru toți $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Se poate arăta, analog ca în cazul operațiilor liniare, că $\| U \|$ este marginea inferioară a numerelor M date de teorema 1.

4. Operațiile multiliniare simetrice se introduc prin

Definiția 5. *Operația multiliniară $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește simetrică, dacă*

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = U(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}),$$

pentru orice permutare $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ a numerelor $(1, 2, \ldots, n)$.

Propoziția 2. *Oricărei operații multiliniare U îi corespunde o operație multiliniară simetrică.*

Demonstrație. Operația

$$U_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum U(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}),$$

unde suma este luată pentru toate permutările $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, este evident simetrică.

Se mai spune că orice operație multiliniară se poate simetriza.

Dacă U este simetrică, atunci

$$U_s = U.$$

5. În legătură cu operațiile multiliniare se definesc și polinoamele.

Definiția 6. *Fie E un spațiu vectorial normat și $U = U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o operație multiliniară simetrică definită pentru $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și cu valori în spațiul vectorial normat F.*

Restricția operației U la diagonală, adică operația

$$P_n(x) = U(x, x, \ldots x)$$

se numește polinom omogen de gradul n definit pe spațiul E și cu valori în F.

Este evident că în cazul cînd E și F coincid cu corpul K al scalarilor, obținem noțiunea obișnuită de polinom.

Propoziția 3. *Dacă $P_n(x)$ este un polinom omogen de gradul n, atunci pentru orice $a \in K$,*

$$P_n(ax) = a^n P_n(x).$$

Această propoziție evidentă justifică denumirea de *omogen*.

Propoziția 4. Pentru combinațiile liniare de elemente din E este valabilă relația

$$P_n(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k) =$$

$$= \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} U(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

unde U este operația multiliniară care-l definește pe P_n și

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n_1} = x_1$$
$$y_{n_1+1} = y_{n_1+2} = \ldots = y_{n_1+n_2} = x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{n_{k-1}+1} = y_{n_{k-1}+2} = \ldots = y_n = x_k.$$

Demonstrație. Rezultă din liniaritatea operației U în raport cu fiecare variabilă.

Propoziția 5. *Dacă P_n este un polinom omogen definit pe E și cu valori în F și T o operație liniară definită pe E și cu valori în F, atunci $T(P_n(x))$ este tot un polinom omogen definit pe E și cu valori în F.*

Demonstrație. Fie U operația multiliniară simetrică de definiție a polinomului P_n. Atunci $T(U(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ este tot o operație multiliniară simetrică, de unde $T(U(x, x, \ldots, x))$ este un polinom omogen.

Propoziția 6. *Dacă P_n este un polinom omogen de gradul n definit pe E și cu valori în E_1, iar P_m este un polinom omogen de gradul m definit pe E_1 și cu valori în E_2, atunci $P_m(P_n(x))$ este un polinom omogen de gradul $m + n$ definit pe E și cu valori în E_2.*

Demonstrație. Dacă U și U_1 sînt operațiile multiliniare simetrice corespunzătoare polinoamelor P_n și P_m, respectiv, atunci operația

$$U(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

unde

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = U_1(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})$$

este o operație multiliniară, în $n + m$ variabile.

Acestei ultime operații îi corespunde, conform propoziției 2, o operație simetrică $U_2(z_1, z_2, \ldots, z_{n+m})$.

Polinomul $P_{m+n}(z, z, \ldots, z)$ este egal cu $P_m(P_n)$.

Definiția 7. *Fie E și F două spații vectoriale. Numim polinom de gradul n în x (definit pe E și cu valori în F) o sumă de forma*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x),$$

unde P_k este un polinom omogen de grad k.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Studiul operațiilor liniare a fost întreprins în special de F. Riesz și S. Banach. Unele demonstrații au fost refăcute, pe considerații mai simple de M. Katetov [155].

2. Funcționalele liniare pozitive au fost studiate de matematicienii sovietici și se găsesc expuse în lucrarea [187] de M. G. Krein și M. A. Rutman.

3. Operațiile multiliniare continue sînt studiate în [8], iar polinoamele în cartea matematicienilor sovietici L. A. Liusternik și V. I. Sobolev [17].

CAPITOLUL III

PRELUNGIREA OPERAȚIILOR LINIARE ȘI MULTILINIARE

Prelungirea operațiilor liniare constituie unul din capitolele cele mai importante în analiza funcțională. Problema se prezintă pentru noi astfel : fie E și E' două spații vectoriale normate, G un subspațiu vectorial al lui E și T o operație liniară definită pe G și avînd contradomeniu spațiul E'. Ne întrebăm dacă există o operație liniară T_1 definită pe E, cu valori în E', avînd aceleași proprietăți ca și T astfel ca

$$T_1(x) = T(x) \text{ pentru orice } x \in G.$$

Proprietatea cea mai importantă care se cere păstrată este continuitatea.

Unul din aspectele problemei este complet rezolvat : se cunoaște natura spațiilor E' care se bucură de proprietatea că orice operație liniară și mărginită avînd drept contradomeniu pe E' se poate prelungi fără să-și majoreze norma.

În acest caz intră celebra teoremă a lui Hahn de prelungire a funcționalelor liniare.

De altă parte, au fost obținute rezultate importante pentru funcționalele pozitive, atunci cînd spațiul E deci și G este și parțial ordonat.

§ 1. Extensiune minimală

Fie G un spațiu vectorial normat.

Definiția 1. *Numim extensiune minimală a lui G un spațiu vectorial normat E care-l include pe G ca subspațiu vectorial normat maximal, adică astfel ca $G \neq E$ și orice subspațiu E_1 pentru care $G \subset E_1 \subset E$ se confundă sau cu G sau cu E.*

În acest paragraf determinăm posibilitatea existenței unei extensiuni minimale. Toate spațiile vectoriale de care vorbim sînt reale.

Teorema 1. *Fie G un spațiu vectorial normat real.*

Presupunem că pe G este definită o funcție cu valori reale ρ, care satisface următoarele condiții :

1) $\rho(x) + \rho(y) \geqslant \|x - y\|$, *pentru orice* $x, y \in G$;

2) $|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \|x - y\|$, *pentru orice* $x, y \in G$;

3) $\rho(ax+(1-a)y) \leqslant a\rho(x)+(1-a)\rho(y)$, *pentru orice* $x, y \in G$ şi $0 \leqslant a \leqslant 1$;

4) $\rho(x) > 0$, *pentru orice* $x \in G$.

În aceste condiţii există o extensiune minimală E *a lui* G *şi un punct* $z \in E$, $z \in G$, *astfel încît*

$$\rho(x) = \|x - z\|, \text{ pentru orice } x \in G$$

Demonstraţie. Putem construi imediat extensiunea minimală algebrică E, adjungînd spaţiului G un element abstract z. Atunci E va fi mulţimea elementelor de forma $y = x + az$ unde x parcurge spaţiul G, iar a spaţiul R al numerelor reale.

Organizarea lui E ca spaţiu vectorial este evidentă, iar elementele sale sînt univoc determinate de reprezentarea dată.

Ne mai rămîne să definim pe E o normă care să verifice condiţia dată. Această normă este dată de expresia

$$\|y\| = \mu(y) = \begin{cases} \|x\| & \text{dacă } a = 0 \\ |a|\,\rho\left(-\frac{1}{a}x\right) & \text{dacă } a \neq 0. \end{cases}$$

Să verificăm că într-adevăr funcţia $\mu(y)$ are proprietăţile unei norme şi anume III_1, III_2, III_3.

Evident, $\mu(y) \geqslant 0$; dacă $a \neq 0$, $\mu(y) > 0$ datorită condiţiei 4) a funcţiei ρ, deci dacă $\mu(y) = 0$ atunci $a = 0$ şi $\|x\| = 0$, de unde rezultă $y = 0$.

Pentru verificarea condiţiei III_2, fie $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$; dacă $a \neq 0$ avem

$$\mu(\alpha y) = |\alpha a|\,\rho\left(-\frac{\alpha}{\alpha a}x\right) = |\alpha|\,\mu(y),$$

iar dacă $a = 0$,

$$\mu(\alpha y) = \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| = |\alpha|\,\mu(y).$$

Pentru verificarea condiţiei III_3, fie y, $t \in E$. Se pot prezenta următoarele cazuri:

a) y, $t \in G$; inegalitatea III_3 rezultă din faptul cu $\|x\|$ este normă în G.

b) $y \notin G$, $t \in G$; atunci $y = x + az$ cu $a \neq 0$,

$$\mu(y+t) = \mu(x+t+az) = |a|\,\rho\left[-\frac{1}{a}(x+t)\right]$$

deci

$$|\mu(y+t) - \mu(y)| = |a|\left|\rho\left(-\frac{1}{a}(x+t)\right) - \rho\left(-\frac{1}{a}x\right)\right| \leqslant \|t\|$$

datorită condiţiei 2). De aici deducem

$$\mu(y+t) \leqslant \mu(y) + \|t\| = \mu(y) + \mu(t).$$

c) $y \notin G$, $t \notin G$; fie

$$y = x + az, \qquad t = u + bz, \qquad x, u \in G, \; a, b \neq 0.$$

În acest caz sînt mai multe posibilități, pe care le examinăm succesiv :

c_1) $a > 0,\ b > 0$; atunci

$$y + t = x + u + (a + b)\,z$$

$$\mu(y + t) = (a + b)\,\rho\left[-\frac{1}{a+b}\,(x + u)\right] =$$

$$= (a + b)\,\rho\left[\frac{a}{a+b}\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \frac{b}{a+b}\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right].$$

Din condiția 3) deducem

$$\mu(y + t) \leqslant (a + b)\left[\frac{a}{a+b}\,\rho\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \frac{b}{a+b}\,\rho\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right]$$

deci

$$\mu(y + t) \leqslant \mu(y) + \mu(t).$$

c_2) $a < 0, \quad b < 0$; atunci

$$\mu(y + t) = -(a + b)\,\rho\left[\frac{-a}{-(a+b)}\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \frac{-b}{-(a+b)}\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right] =$$

$$= |a + b|\,\rho\left[\frac{|a|}{|a+b|}\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \frac{|b|}{|a+b|}\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant |a + b|\left[\frac{|a|}{|a+b|}\,\rho\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \frac{|b|}{|a+b|}\,\rho\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right]$$

deci

$$\mu(y + t) \leqslant \mu(y) + \mu(t).$$

c_3) $ab < 0$ și $a + b \neq 0$; atunci $a + b$ are sau semnul lui a sau al lui b. Putem lua, fără a micșora generalitatea,

$$a > 0, \quad b < 0, \quad a + b > 0.$$

Din condiția 2) obținem

$$(a + b)\left[\rho\left(-\frac{1}{a+b}\,(x + u)\right) - \rho\left(-\frac{1}{a}\,x\right)\right] \leqslant \left\|\frac{b}{a}\,x - u\right\|,$$

iar din 1)

$$\left\|\frac{b}{a}\,x - u\right\| = |b|\left\|-\frac{1}{a}\,x - \left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant |b|\left[\rho\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + \rho\left(-\frac{1}{b}\,u\right)\right]$$

deci

$$(a + b)\,\rho\left(-\frac{1}{a+b}\,(x + u)\right) \leqslant a\,\rho\left(-\frac{1}{a}\,x\right) + |b|\,\rho\left(-\frac{1}{b}\,u\right)$$

adică

$$\mu(y+t) \leqslant \mu(y) + \mu(t).$$

c_4) $a = -b$; putem lua $a > 0$. Atunci

$$\mu(y+t) = \|x+u\| = a\left\|\frac{1}{a}x - \frac{1}{b}u\right\|$$

şi din 1) deducem

$$\mu(y+t) \leqslant a\,\rho\left(-\frac{1}{a}x\right) + |b|\,\rho\left(-\frac{1}{b}\right) = \mu(y) + \mu(t).$$

Am arătat astfel, că în toate cazurile posibile, funcţia $\mu(y)$ verifică condiţia III_3 (a triunghiului).

Spaţiul E este deci vectorial normat şi G este un subspaţiu vectorial normat (închis) maximal, iar

$$\rho(x) = \|x - z\| \text{ pentru orice } x \in G.$$

Teorema este demonstrată.

Se poate verifica uşor.

Propoziţia 1. *Dacă E este un subspaţiu vectorial normat şi G un subspaţiu vectorial normat maximal al său, atunci pentru orice element $z \in \complement G$ (în E), funcţia $\rho(x) = \|x - z\|$ definită pe G are proprietăţile* 1), 2), 3), 4).

Să căutăm însă, condiţii în care există o funcţie ρ cu proprietăţile 1), 2), 3), 4) definită pe G, fără a presupune că G este un subspaţiu vectorial normat maximal. În această privinţă avem, evident, în primul rînd,

Propoziţia 2. *Fie ρ_1 şi ρ două funcţii reale definite pe spaţiul vectorial normat G, astfel încît ρ satisface condiţiile* 1), 2) *şi* 3) *şi $\rho_1(x) \geqslant \rho(x)$ pentru $x \in G$. Atunci ρ_1 satisface condiţia* 1), *adică*

$$\rho_1(x) + \rho_1(y) \geqslant \|x - y\|.$$

Vom arăta că şi reciproca propoziţiei 2 este adevărată.

Teorema 2. *Fie G un spaţiu vectorial normat şi ρ_1 o funcţie reală definită pe G, astfel încît*

$$\rho_1(x) + \rho_1(y) \geqslant \|x - y\|, \text{ pentru orice } x, y \in G.$$

Atunci există o funcţie reală ρ definită pe G satisfăcînd condiţiile 1), 2), 3) *şi astfel încît $\rho_1(x) \geqslant \rho(x)$ pentru orice $x \in G$.*

Demonstraţie. Considerăm mulţimea Δ a tuturor funcţiilor f definite pe G şi satisfăcînd inegalitatea

$$f(x) + f(y) \geqslant \|x - y\|, \text{ pentru orice } x, y \in G.$$

Evident că toate funcţiile $f \in \Delta$ sînt pozitive:

$$f(x) \geqslant 0, \text{ pentru orice } x \in G.$$

Vom arăta că mulţimea Δ este ordonată inductiv de relaţia $f_1 \leqslant f_2$, care înseamnă

$$f_1(x) \leqslant f_2(x), \text{ pentru orice } x \in G.$$

Fie într-adevăr $\Gamma \subset \Delta$ o mulțime total-ordonată prin relația de mai sus din mulțimea Δ. Pentru orice $x \in G$ însemnăm prin $\varphi(x)$ marginea inferioară a numerelor $f(x)$ cînd f parcurge mulțimea Γ. Pentru orice $x, y \in G$ și $\varepsilon > 0$ există $f_1 \in \Gamma$ și $f_2 \in \Gamma$ astfel încît

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon \qquad \text{și } f_2(y) \leqslant \varphi(y) + \varepsilon.$$

Deoarece Γ este total-ordonată, avem sau $f_1 \leqslant f_2$ sau $f_2 \leqslant f_1$. Presupunînd primul caz, $f_1(y) \leqslant f_2(y)$, de unde rezultă

$$\|x - y\| \leqslant f_1(x) + f_1(y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) + 2\varepsilon.$$

Făcînd pe ε să tindă către 0, deducem că $\varphi \in \Delta$, deci într-adevăr Γ are o margine inferioară în Δ, de unde rezultă că Δ este ordonată inductiv.

Atunci, deoarece $\rho_1 \in \Delta$, există în Δ un element minimal ρ astfel încît $\rho_1 \geqslant \rho$.

Ne mai rămîne să arătăm că elementele minimale din Δ satisfac condițiile 2) și 3).

Fie ρ un astfel de element, $h \geqslant 0$ un număr real și x_0 un element din G. Definim pe spațiul G funcția reală φ prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} h & \text{dacă } x = x_0 \\ \rho(x) & \text{dacă } x \neq x_0. \end{cases}$$

Funcția φ aparține mulțimii Δ dacă și numai dacă

$$h \geqslant \sup_{x \in G} \{\|x - x_0\| - \rho(x)\}. \tag{1}$$

Presupunem că h satisface această condiție și fie $\varphi \in \Delta$ funcția corespunzătoare. Nu putem avea $\varphi \leqslant \rho$, $\varphi \neq \rho$ deoarece ρ este minimal, deci $h \geqslant \rho(x_0)$.

Deducem de aici că

$$\max\{0, \sup_{x \in G} (\|x - x_0\| - \rho(x))\} \geqslant \rho(x_0). \tag{2}$$

Observăm acum că

$$\rho(x) + \rho(y) \geqslant \|x - y\| \geqslant \|x - x_0\| - \|x_0 - y\|$$

de unde rezultă că

$$\|x_0 - y\| + \rho(y) \geqslant \sup_{x \in G} (\|x - x_0\| - \rho(x)) \tag{3}$$

Din (2) și (3) deducem

$$\|x_0 - y\| \geqslant \rho(x_0) - \rho(y)$$

și, pentru că x_0 și y au roluri simetrice și au fost alese arbitrar,

$$\|x - y\| \geqslant |\rho(x) - \rho(y)|, \text{ pentru orice } x, y \in G,$$

adică ρ satisface condiția 2).

Fie acum $x, y \in G$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ și $z = ax + (1 - a)y$.

Avem relația

$$a\rho(x) + (1 - a)\rho(y) \geqslant \sup_{t \in G} \{\|t - z\| - \rho(t)\}. \tag{4}$$

Într-adevăr

$$\|t-z\| = \|a(t-x) + (1-a)(t-y)\| \leqslant$$
$$\leqslant a\|t-x\| + (1-a)\|t-y\| \leqslant$$
$$\leqslant a(\rho(t) + \rho(x)) + (1-a)(\rho(t) + \rho(y))$$

deci

$$\|t-z\| - \rho(t) \leqslant a\,\rho(x) + (1-a)\,\rho(y)$$

de unde rezultă (4).

Deci, putem lua în relația (2),

$$h = a\rho(x) + (1-a)\rho(y)$$

și deducem $h \geqslant \rho(z)$, adică

$$a\rho(x) + (1-a)\,\rho(y) \geqslant \rho(z).$$

Am arătat astfel că ρ satisface și condiția 3).

Teorema este demonstrată.

§ 2. Prelungirea operațiilor care au contradomeniile în spații cu proprietatea intersecției binare

1. Am arătat în capitolul I, în ce constă proprietatea intersecției binare.

Pentru a simplifica enunțurile, mai introducem și

D e f i n i ț i a 1. *Fie E' un spațiu vectorial normat. Spunem că E' are proprietatea prelungirii, sau mai scurt, proprietatea ($\mathfrak{Z}$), dacă este satisfăcută următoarea condiție:*

Pentru orice spațiu vectorial normat E, orice subspațiu vectorial normat $G \subset E$ și orice operație liniară și continuă T, definită pe G și cu valori în E', există o operație liniară și continuă $\mathcal{T}$ definită pe E și cu valori în E', astfel încît

$$\mathcal{T}(x) = T(x), \text{ pentru orice } x \in G$$

și

$$\|\mathcal{T}\|_E = \|T\|_G.$$

O consecință imediată a acestei definiții este următoarea

P r o p o z i ț i e. *Fie E' un spațiu vectorial normat cu proprietatea ($\mathfrak{Z}$). Atunci E' are și următoarea proprietate:*

Oricare ar fi spațiul vectorial H, care-l conține pe E' ca subspațiu vectorial normat, există o proiecție de normă 1 a lui H pe E', adică o operație liniară și continuă P, definită pe H, cu valori în E', astfel încît

$$P(x) = x, \text{ pentru orice } x \in E'$$

și

$$\|P\| = 1.$$

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm operația identitate I, a spațiului E' pe el însuși. Proiecția P este prelungirea operației I la întreg spațiul H.

O b s e r v a ț i e. Se poate demonstra și reciproca propoziției 1, însă nu intră în cadrul acestui capitol.

2. Enunțăm acum teorema principală a acestui capitol.

Teorema 1. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un spațiu vectorial normat să posede proprietatea* ($\mathcal{S}$), *este ca el să aibă proprietatea intersecției binare.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Considerăm un spațiu vectorial normat E, fără proprietatea intersecției binare. Există deci o mulțime de sfere închise $\{\overline{S}_\alpha\}_{\alpha \in I}$, astfel că

$$\overline{S}_\alpha \cap \overline{S}_\beta \neq \theta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in I.$$

și

$$\bigcap_{\alpha \in I} \overline{S}_\alpha = \theta.$$

Însemnăm prin A mulțimea centrelor sferelor din familia $\{\overline{S}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ și pentru orice $x \in A$, cu $\rho_1(x)$ marginea inferioară a razelor sferelor din familia $\{\overline{S}_\alpha\}$, care au centrul în x.

Funcția ρ_1 verifică inegalitatea

$$\rho_1(x) + \rho_1(y) \geqslant \|x - y\|, \quad x, y \in A \tag{1}$$

pentru că orice sferă cu centrul în punctul x se intersectează cu oricare sferă cu centrul în y.

Considerăm acum mulțimea $\{\overline{S}_x\}_{x \in A}$ a sferelor închise care au centrele în punctele x ale mulțimii A și razele $\rho_1(x)$ corespunzătoare.

Sferele din mulțimea $\{\overline{S}_x\}_{x \in A}$ au de asemenea proprietățile

$$\overline{S}_x \cap \overline{S}_y \neq \theta, \qquad x, y \in A$$

și

$$\bigcap_{x \in A} \overline{S}_x \subset \bigcap_{\alpha \in I} \overline{S}_\alpha = \theta.$$

Prima rezultă din (1), iar a doua din faptul că orice sferă $\overline{S}_x$ este inclusă într-o sferă $\overline{S}_\alpha$.

Dacă mulțimea A nu coincide cu întreg spațiul E, extindem familia de sfere $\{\overline{S}_x\}_{x \in A}$ până la familia $\{\overline{S}_x\}_{x \in E}$, astfel:

Considerăm un punct fix $x_0 \in A$ și pentru orice $x \in \complement A$ însemnăm prin $\overline{S}_x$ sfera închisă cu centrul x și raza

$$\|x - x_0\| + \rho_1(x_0) = \rho_1(x).$$

Două sfere oarecare din mulțimea $\{\overline{S}_x\}_{x \in E}$ se intersectează deoarece toate sferele $\overline{S}_x$ cu $x \in \complement A$ includ sfera de centru x_0 și de rază $\rho_1(x_0)$. De asemenea

$$\bigcap_{x \in E} \overline{S}_x = \theta$$

în mod evident.

Funcția $\rho_1(x)$, definită acum pe întreg E, satisface inegalitatea

$$\rho_1(x) + \rho_1(y) \geqslant \|x - y\|, \text{ pentru orice } x, y \in E.$$

Mai mult, inegalitatea

$$\rho_1(x) \geqslant \|x - x_0\|, \text{ pentru orice } x \in E$$

nu poate fi satisfăcută pentru nici un $x_0 \in E$, deoarece atunci x_0 ar aparține tuturor sferelor din familia $\{\overline{S}_\alpha\}_{\alpha \in E}$.

Aplicînd teorema 2 din paragraful 1, există o funcție reală ρ definită pe E, satisfăcînd condițiile 1), 2), 3) din teorema 1, paragraful 1 și astfel încît

$$\rho_1(x) \geqslant \rho(x), \text{ pentru orice } x \in E.$$

Este evident că inegalitatea

$$\rho(x) \geqslant \|x - x_0\|, \text{ pentru orice } x \in E$$

nu poate fi satisfăcută pentru nici un $x_0 \in E$.

De aici deducem că funcția ρ satisface și condiția 4) din teorema 1, paragraful 1, deoarece inegalitatea $\rho(x_0) \leqslant 0$ implică

$$\rho(x) \geqslant \rho(x) + \rho(x_0) \geqslant \|x - x_0\|, \text{ pentru orice } x \in E$$

O dată ce existența funcției ρ a fost demonstrată, putem aplica teorema 1, din paragraful 1 și obținem o extensiune minimală E_1 a spațiului E și un element $z \in E_1$, astfel încît

$$\rho(x) = \|x - z\|, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Vom arăta acum că nu există nici o proiecție a spațiului E_1 pe E. Într-adevăr, dacă o astfel de proiecție P ar exista, elementul

$$x_0 = P(z) \in E$$

ar verifica inegalitatea

$$\|P(y) - x_0\| = \|P(P(y) - z)\| \leqslant \|P\| \cdot \|P(y) - z\| = P(y) - z\|,$$

pentru orice $y \in E_1$,

adică,

$$\|x - x_0\| \leqslant \|x - z\| = \rho(x), \text{ pentru orice } x \in E.$$

Aplicînd propoziția 1, din paragraful 1 deducem că un spațiu vectorial normat care nu are proprietatea intersecției binare nu are nici proprietatea $(\mathcal{S})$ și astfel necesitatea condiției din teorema 1 este demonstrată.

Condiția este suficientă. Fie E' un spațiu vectorial normat cu proprietatea intersecției binare, E un alt spațiu vectorial normat, G un subspațiu vectorial normat al lui E și T o operație liniară și continuă, definită pe G și cu valori în E'.

Considerăm mulțimea $\mathcal{F}$ a tuturor operațiilor T_H liniare și continue, definite pe subspațiile vectoriale normate $H \subset E$, care includ pe G și astfel încît

$$\|T_H\|_H = \|T\|_G$$

$$T_H(x) = T(x), \text{ pentru } x \in G.$$

Vom arăta că această mulțime $\mathfrak{F}$ este nevidă și ordonată inductiv de relația de incluziune din spațiul E.

1) Mulțimea $\mathfrak{F}$ este nevidă pentru că $T \in \mathfrak{F}$.

2) Mulțimea $\mathfrak{F}$ este ordonată inductiv de relația

$$T_{H'} \leqslant T_{H''} \quad \text{dacă } H' \subset H''.$$

Fie într-adevăr $\{H_\iota\}_{\iota \in I}$ o mulțime total ordonată, prin relația de incluziune din E, de subspații vectoriale normate ale lui E. Atunci

$$L = \bigcup_{\iota \in I} H_\iota$$

este un subspațiu vectorial al lui E care include pe G și pe fiecare H_ι. Definim operația T_L pe L prin

$$T_L(x) = T_{H_\iota}(x) \text{ dacă } x \in H_\iota .$$

Evident T_L este o operație liniară și continuă și poate fi prelungită prin continuitate, fără să-și schimbe norma pe închiderea lui L în E, care este un subspațiu vectorial normat al lui E. Obținem deci o operație T_L, definită pe L, care este marginea superioară a operațiilor T_{H_ι}.

Aplicăm acum teorema lui Zorn, care ne asigură existența unei operații maximale în mulțimea parțial ordonată pe care am considerat-o, adică a unei operații $T_M \in \mathfrak{F}$ definită pe un subspațiu vectorial normat M al lui E și astfel că T_M nu mai poate fi prelungită.

Dacă arătăm că subspațiul M nu poate fi diferit de M, demonstrația este terminată.

Presupunem că $M \neq E$ și considerăm mulțimea $M' = T_M(M) \subset E'$ și un punct $x_0 \in E$, dar $x_0 \notin M$. Definim o funcție $\rho(u)$ pe M' prin

$$\rho(u) = \|T\| \cdot \inf_{x \in T_M^{-1}(u)} \|x - x_0\| .$$

Avem

$$\rho(u_1) + \rho(u_2) \geqslant \|u_1 - u_2\|, \text{ pentru orice } u_1, u_2 \in M'. \tag{2}$$

Într-adevăr, dacă $x_1 \in T_M^{-1}(u_1)$ și $x_2 \in T_M^{-1}(u_2)$, atunci din

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \|x_1 - x_0\| + \|x_2 - x_0\|$$

și

$$\|u_1 - u_2\| = \|T_M(x_1 - x_2)\| \leqslant \|T_M\| \cdot \|x_1 - x_2\| = \|T\| \cdot \|x_1 - x_2\|,$$

deducem

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \|T\| \cdot \|x_1 - x_0\| + \|T\| \cdot \|x_2 - x_0\|$$

de unde rezultă inegalitatea (2).

Fie acum $\overline{S}_u$ sfera închisă din spațiul E', de centru u și rază $\rho(u)$. Din relația (2) se vede că

$$\overline{S}_{u_1} \cap \overline{S}_{u_2} \neq \emptyset, \text{ pentru orice } u_1, u_2 \in M'.$$

Atunci, deoarece spațiul E' are proprietatea intersecției binare,

$$\bigcap_{u \in M'} \overline{S}_u \neq \emptyset.$$

Există deci un punct z_0 comun tuturor sferelor din mulțimea $\{\overline{S}_u\}_{u \in M}$, astfel încît

$$\| T_M(x) - z_0 \| \leqslant \| T \| \cdot \| x - x_0 \|, \text{ pentru orice } x \in M.$$

Fie M_1 subspațiul vectorial normat al lui E, generat de M și x_0, adică mulțimea elementelor

$$y = x + ax_0,$$

unde

$$x \in M \text{ și } a \in R.$$

Definim operația T_{M_1} pe M_1 și cu valori în E', prin

$$T_{M_1}(y) = T_M(x) + a z_0.$$

Operația T_{M_1} este evident liniară. Ea este și continuă, pentru că dacă $a \neq 0$.

$$\| T_{M_1}(y) \| = \| T_{M_1}(x + ax_0) \| = \| T_M(x) + az_0 \| =$$

$$= |a| \left\| T_M\left(-\frac{1}{a} x\right) - z_0 \right\| \leqslant |a| \cdot \| T \| \cdot \left\| -\frac{1}{a} x - x_0 \right\| =$$

$$= \| T \| \| x + ax_0 \|.$$

Din ultima relație rezultă și

$$\| T_{M_1} \| = \| T \|.$$

Am ajuns astfel la concluzia că dacă $E \neq M$, operația T_M nu este maximală, de unde deducem că $E = M$.

Teorema este astfel complet demonstrată.

3. Ca un caz particular al teoremei 1, obținem teorema prelungirii funcționalelor liniare reale demonstrată de H. Hahn.

T e o r e m a 2. *Fie E un spațiu vectorial normat real, G un subspațiu vectorial normat și f o funcțională (operație cu valori reale) liniară și continuă definită pe G. Există o funcțională liniară și continuă F definită pe E și astfel încît*

$$F(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in G,$$

$$\| F \|_E = \| f \|_G.$$

D e m o n s t r a ț i e. Este suficient să observăm că dreapta reală este o latice vectorială completă cu element unitate, deci că are proprietatea intersecției binare.

Teorema 2 se poate obține și prin particularizarea teoremei lui Banach, pe care o vom demonstra acum în condiții mai largi.

D e f i n i ț i a 2. *Fie E un spațiu vectorial și E' o latice vectorială completă. Funcția p definită pe E și cu valori în E' se numește subadițivă sau convexă dacă*

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y).$$

Funcția p se numește pozitiv-omogenă dacă

$$p(ax) = ap(x),$$

pentru orice număr real pozitiv a și orice $x \in E$.

Teorema 3. *Fie p o funcție subaditivă și omogenă definită pe spațiul vectorial E și cu valori în laticea vectorială completă E'. Dacă T este o operație liniară definită pe un subspațiu vectorial $G \subset E$, cu valori în E' și astfel ca*

$$T(x) \leqslant p(x), \qquad \text{pentru orice } x \in G,$$

atunci există o operație liniară $\mathcal{T}$ definită pe E și cu valori în E', astfel ca

$$\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(x), \qquad \text{pentru } x \in G$$

și

$$\mathcal{T}(x) \leqslant p(x), \qquad \text{pentru } x \in E.$$

Demonstrație. Fie $\mathfrak{F}$ mulțimea operațiilor liniare definite pe subspațiile vectoriale $H \subset E$ care includ pe G și care coincid cu T pe G. La fel ca pentru teorema 1 se poate vedea că mulțimea $\mathfrak{F}$ nu este vidă și este ordonată inductiv de relația

$$T_{H'} \leqslant T_{H''}$$

echivalentă cu

$$H' \subset H''.$$

Există deci o operație $T_M \in \mathfrak{F}$, maximală față de această relație de ordonare.

Vom arăta acum că M nu poate fi diferit de E. Presupunînd că $M \neq E$, există un element $x_0 \in \complement M$.

Fie M_1 subspațiul vectorial al elementelor de forma

$$y = x + ax_0$$

cu $x \in M$ și $a \in R$.

Fie x' și x'' două elemente oarecare din M. Atunci

$$T_M(x'') - T_M(x') = T_M(x'' - x') \leqslant p(x'' - x') = p(x'' + x_0 - x' - x_0)$$

deci

$$T_M(x'') - T_M(x') \leqslant p(x'' + x_0) + p(-x' - x_0)$$

adică

$$T_M(x'') - p(x'' + x_0) \leqslant T_M(x') + p(-x' - x_0).$$

De aici rezultă că există în E' elementele

$$z' = \sup_{x \in M} \{ T_M(x) - p(x + x_0) \},$$

$$z'' = \inf_{x \in M} \{ T_M(x) + p(-x - x_0) \}.$$

Fie $z \in E'$, astfel încît

$$z' \leqslant z \leqslant z'',$$

deci

$$T_M(x) - p(x + x_0) \leqslant z \leqslant T_M(x) + p(-x - x_0),$$

pentru orice $x \in M$. De aici deducem

$$-p(-x - x_0) \leqslant T_M(x) - z \leqslant p\,x_0) \quad (x + \qquad (3)$$

Definim operația T_{M_1} pe M_1 prin

$$T_{M_1}(y) = T_M(x) - az.$$

Operația T_{M_1} este o prelungire liniară pe M_1 a operației T_M, în mod evident. Ea verifică și relația

$$T_{M_1}(y) \leqslant p(y).$$

Pentru $a = 0$ în expresia lui y, această afirmație este evidentă. Pentru $a \neq 0$ să înlocuim în (3) pe x prin $\frac{1}{a}x$:

$$-p\left(-\frac{1}{a}x - x_0\right) \leqslant T_M\left(\frac{1}{a}x\right) - z \leqslant p\left(\frac{1}{a}x + x_0\right).$$

Dacă $a > 0$, a doua inegalitate ne dă

$$\frac{1}{a}T_M(x) - z \leqslant \frac{1}{a}p(x + ax_0),$$

adică, înmulțind cu a,

$$T_M(x) - az \leqslant p(x + ax_0)$$

sau

$$T_{M_1}(y) \leqslant p(y).$$

Dacă $a < 0$, obținem același lucru din prima inegalitate.

Am demonstrat astfel că dacă $M \neq E$, operația T_M nu poate fi maximală.

Teorema este complet demonstrată.

4. Condițiile teoremei 1 se pot lărgi, renunțînd la păstrarea normei prin prelungire și cerînd numai păstrarea continuității.

Definiția 3. *Dacă în definiția 1 renunțăm la ultima condiție* ($\|\mathcal{S}\|_E = \|T\|_G$), *păstrînd celelalte condiții, vom spune că spațiul E' are proprietatea* ($\mathfrak{S}'$).

Ținînd seama de această definiție putem enunța

Teorema 4. *Pentru ca un spațiu vectorial normat E' să posede proprietatea* ($\mathfrak{S}'$) *este suficient ca E' să fie izomorf algebric și topologic cu un spațiu F care are proprietatea intersecției binare.*

Demonstrație. Fie E un spațiu vectorial normat, G un subspațiu vectorial normat al lui E și T o operație liniară și continuă definită pe G și cu valori în E'. Fie de asemenea J izomorfismul algebric și topologic între E' și F,

$$J(E') = F, \quad J^{-1}(F) = E'.$$

Operația JT este definită pe G și are valorile în F. Dacă F are proprietatea intersecției binare, operația JT se poate prelungi, după teorema 1, pe tot spațiul E. Fie $\mathcal{S}$ operația obținută prin prelungire.

Atunci operația $J^{-1}\mathcal{S}$ este definită pe E, are valorile în E' și este continuă. De asemenea e clar că $J^{-1}\mathcal{S}$ coincide cu $T = J^{-1}(JT)$ pe subspațiul G și teorema e demonstrată.

3. Prelungirea operațiilor liniare pozitive cu valori într-o latice vectorială completă

În paragraful 2 am cercetat posibilitatea prelungirii spațiilor liniare continue cu păstrarea normei sau numai a continuității.

În cadrul spațiilor vectoriale ordonate se pune problema prelungirii operațiilor liniare continue și pozitive, cu păstrarea acestor calități.

Se obțin rezultate analoge cu cele din paragraful 2; de asemenea și demonstrațiile sînt analoge, avînd însă la bază relațiile de ordonare

Teoremă. *Fie E un spațiu vectorial normat ordonat* int $E_+ \neq 0$ *și G un subspațiu vectorial normat al lui E, astfel încît $G \cap$* int $E_+ \neq 0$. *Fie E' o latice vectorială completă, cu element unitate e, normată prin*

$$\| y \| = \inf \{ \lambda \mid -\lambda e \leqslant y \leqslant \lambda e \}, \quad (y \in E').$$

Dacă T este o operație liniară continuă și pozitivă definită pe G și cu valori în E' există o operație liniară continuă și pozitivă $\mathcal{T}$, definită pe E, cu valori în E' și astfel încît

$$\mathcal{T}(x) = T(x), \text{ pentru } x \in G.$$

Demonstrație. Însemnăm prin $\mathcal{T}_+$ mulțimea operațiilor liniare, continue și pozitive T_H definite pe subspațiile vectoriale normate $H \subset E$ care includ pe G și astfel încît

$$T_H(x) = T(x), \qquad \text{pentru } x \in G.$$

Analog ca pentru mulțimea $\mathcal{T}$ se arată din demonstrația teoremei 1, paragraful 2, că mulțimea $\mathcal{T}_+$ este nevidă și ordonată inductiv de relația

$$T'_H \leqslant T''_H$$

care este echivalentă cu

$$H' \subset H''.$$

Atunci există în mulțimea $\mathcal{T}_+$ o operație maximală $T_M \geqslant T$. Rămîne să arătăm că subspațiul M, pe care este definită această operație maximală, nu poate fi diferit de E. Presupunem contrariul adică $M \neq E$. Prin ipoteză există un element $u \in M \cap$ int E_+, deci și o sferă de rază $r > 0$,

$$S(u; r) \subset E_+.$$

Fie $y_0 \in \complement M$ și x', x'' două elemente din M, astfel încît

$$x' \leqslant y_0 \leqslant x''. \tag{1}$$

Astfel de elemente există, deoarece

$$u \pm \frac{r}{\| y_0 \|} y_0 \in E_+$$

și prin urmare

$$-\frac{\| y_0 \|}{r} u \leqslant y_0 \leqslant \frac{\| y_0 \|}{r} u.$$

Deoarece $T(x') \leqslant T(x'')$ există un element $z \in E'$, astfel încît

$$\sup \{T(x')\} \leqslant z \leqslant \inf \{T(x'')\},$$

unde sup și inf sînt luate, respectiv pe mulțimile elementelor x', x'' care verifică relația (1).

Fie M_1 subspațiul elementelor de forma

$$y = x + ay_0,$$

unde x parcurge subspațiul M, iar a mulțimea numerelor reale. Operația, definită pe M_1,

$$T_{M_1}(y) = T_M(x) + az$$

este aditivă și pozitivă, deci liniară și continuă. Aditivitatea este evidentă. Pozitivitatea rezultă după cum urmează:

Dacă

$$y = x + ay_0 \geqslant 0 \quad (a \neq 0),$$

atunci

$$y_0 \geqslant -\frac{1}{a}\, x, \quad \text{pentru } a > 0$$

și

$$y_0 \leqslant -\frac{1}{a}\, x, \quad \text{pentru } a > 0.$$

De aici

$$z \geqslant -\frac{1}{a}\, T_M(x), \quad \text{pentru } a > 0$$

și

$$z \leqslant -\frac{1}{a}\, T_M(x), \quad \text{pentru } a < 0$$

și prin urmare, în amîndouă cazurile,

$$T_{M_1}(y) = T_M(x) + az \geqslant 0.$$

Teorema este demonstrată, deoarece în ipoteza $M \neq E$, am construit o prelungire a operației T_M, ceea ce înseamnă că T_M nu este maximală.

§ 4. Prelungirea funcționalelor liniare complexe

1. Am considerat în paragrafele precedente numai spații vectoriale reale. Însă rezultatele obținute în paragrafele 1 și 2 se pot extinde și în cadrul spațiilor vectoriale complexe. Ne mulțumim aici să extindem rezultatele relative la funcționale.

În primul rînd avem

Teorema 1. *Fie $h(z)$ o funcțională cu valori reale, aditivă și omogenă față de numerele reale, definită pe un subspațiu vectorial complex G al spațiului vectorial complex E și mărginită pe G.*

Funcționala h se poate prelungi pe tot spațiul E, fără să-și majoreze norma.

Demonstrație. Este aceeași ca în cazul spațiilor vectoriale reale, pentru că spațiile vectoriale complexe sînt în același timp și reale.

Observăm că funcționala prelungită este reală, deci omogenă numai față de numerele reale.

2. Pentru a trece la funcționalele complexe, demonstrăm mai întîi

Teorema 2. *Orice funcțională liniară complexă f definită pe un spațiu vectorial complex E este de forma*

$$f(z) = h(z) - ih(iz),$$

unde h este o funcțională cu valori reale, aditivă și omogenă față de numerele reale.

Demonstrație. Fie

$$f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

unde $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sînt, respectiv, partea reală și partea imaginară a numărului complex $f(z)$. Funcționalele f_1 și f_2 sînt aditive. Într-adevăr

$$f_1(z_1 + z_2) = f_1(z_1 + z_2) + if_2(z_1 + z_2),$$

$$f(z_1) + f(z_2) = f_1(z_1) + if_2(z_1) + f_1(z_2) + if_2(z_2) =$$

$$= f_1(z_1) + f_1(z_2) + i(f_2(z_1) + f_2(z_2))$$

de unde obținem

$$f_1(z_1 + z_2) = f_1(z_1) + f_1(z_2),$$

$$f_2(z_1 + z_2) = f_2(z_1) + f_2(z_2).$$

De asemenea ele sînt omogene față de numerele reale. Într-adevăr, dacă α este real, $\alpha f_1(z)$ și $\alpha f_2(z)$ sînt tot reale și din egalitățile

$$f(\alpha z) = f_1(\alpha z) + if_2(\alpha z),$$

$$\alpha f(z) = \alpha f_1(z) + i\alpha f_2(z)$$

rezultă

$$f_1(\alpha z) = \alpha f_1(z),$$

$$f_2(\alpha z) = \alpha f_2(z).$$

Rămîne să arătăm că

$$f_2(z) = -f_1(iz).$$

Aceasta rezultă din egalitățile

$$f(iz) = f_1(iz) + if_2(iz) = if_1(z) - f_2(z).$$

Dacă notăm acum $f_1(z) = h(z)$, teorema este demonstrată.

Teorema 3. *Fie f o funcțională liniară complexă, definită pe un subspațiu complex G al spațiului vectorial complex E și mărginită pe G.*

Există o funcțională liniară complexă mărginită, F, definită pe E și astfel încît

$$F(z) = f(z), \qquad \text{pentru } z \in G$$

și

$$\|F\|_E = \|f\|_G.$$

Demonstrație. Am văzut că f este de forma

$$f(z) = h(z) - ih(iz),$$

unde h este o funcțională cu valori reale, aditivă și omogenă față de numerele reale. Deoarece f este mărginită și

$$|h(z)| \leqslant |f(z)|,$$

funcționala h este și ea mărginită și are norma egală cu norma funcționalei f.

Teorema 1 ne asigură prelungirea funcționalei h pe tot spațiul E, printr-o funcțională H, fără majorarea normei. Punînd

$$F(z) = H(z) = -iH(iz)$$

obținem prelungirea funcționalei f.

Într-adevăr F este evident aditivă. Ea este și omogenă față de numerele complexe: dacă a și b sînt numere reale,

$$\begin{aligned} F(a+ib)z &= F(az+ibz) = H(az+ibz) - iH(iaz-bz) = \\ &= aH(z) + bH(iz) - iH(iz) + ibH(z) = \\ &= (a+ib)H(z) + (b-ia)H(iz) = \\ &= (a+ib)H(z) - i(a+ib)H(iz) = \\ &= (a+ib)F(z). \end{aligned}$$

De asemenea, funcționala F este mărginită și are aceeași normă ca H: dacă $F(z) = \rho e^{i\theta}$, atunci

$$|F(z)| = \rho = e^{-i\theta}F(z) = F(e^{-i\theta}z) = H(e^{-i\theta}z) \leqslant \|H\| \cdot \|z\|.$$

Teorema este demonstrată.

§ 5. Existența funcționalelor liniare continue

În acest paragraf, dacă nu se menționează altfel, este vorba de spații vectoriale față de corpul K (real sau complex).

1. O consecință importantă a teoremelor de prelungire este existența funcționalelor liniare continue neidentic nule în orice spațiu vectorial normat.

Următoarele teoreme sînt concludente în această privință.

Teorema 1. *Fie E un spațiu vectorial normat.*

Pentru orice element $x_0 \in E$, există o funcțională liniară f definită pe E și astfel încît

$$f(x_0) = \|x_0\|, \qquad \|f\| = 1.$$

Demonstrație. Fie G subspațiul vectorial generat de elementul x_0, adică mulțimea elementelor de forma $x = ax_0$ cu $a \in K$. Pe G definim o funcțională liniară

$$h(x) = a\|x_0\|.$$

Evident că h este continuă și $\| h \| = 1$. Prelungind funcționala h pe tot spațiul E, fără majorarea normei, obținem funcționala f căutată.

Teorema 2. *Fie G un subspațiu vectorial normat al spațiului vectorial normat E și un element $x_0 \in E$ astfel ca $d(x_0, G) = d > 0$. Atunci există o funcțională liniară și mărginită f definită pe E și satisfăcînd următoarele condiții:*

1) $f(x_0) = 1$;

2) $f(x) = 0$, pentru orice $x \in G$;

3) $\| f \| = \frac{1}{d}$.

Demonstrație. Fie H mulțimea elementelor de forma

$$y = x + ax_0,$$

unde $x \in G$ și $a \in K$. Elementele din H sînt univoc determinate de această expresie.

Definim pe H o funcțională h prin relația

$$h(y) = a.$$

Funcționala h este evident aditivă și omogenă. Ea este și mărginită:

$$\| y \| = \| x + ax_0 \| = \| \frac{1}{a} x + x_0 \| \cdot | a | = \| - \frac{x}{a} - x_0 \| \cdot | a | \geqslant d \, | a |$$

de unde obținem

$$| h(y) | = | a | \leqslant \frac{1}{d} \| y \|.$$

Tot de aici rezultă și

$$\| h \|_H \leqslant \frac{1}{d}.$$

Elementul x_0 fiind situat la distanța $d > 0$ de G, există un șir de elemente x_n din G astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = d.$$

Însă

$$x_n - x_0 \in H,$$

deci

$$| h(x_n - x_0) | = | -1 | \leqslant \| h \|_H \| x_n - x_0 \|$$

în consecință

$$1 \leqslant \| h \|_H \cdot d$$

de unde obținem

$$\frac{1}{d} \leqslant \| h \|_H$$

Cum și inegalitatea contrară a fost demonstrată, rezultă

$$\| h \|_H = \frac{1}{d}.$$

În virtutea teoremelor de prelungire a funcționalelor liniare mărginite, există o funcțională liniară și mărginită definită pe E, astfel ca

$$h(y) = f(y), \text{ pentru orice } y \in H$$

și

$$\| f \|_E = \| h \|_H = \frac{1}{d}.$$

Cum $h(x_0) = 1$ și $h(x) = 0$ pentru $x \in G$, aceleași proprietăți se păstrează și pentru f, deci teorema este demonstrată.

Teorema 3. *Fie h o funcțională oarecare definită pe o parte oarecare H a unui spațiu vectorial normat E și un număr pozitiv μ.*

Condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o funcțională liniară și mărginită f definită pe E și satisfăcînd condițiile

$$f(x) = h(x), \text{ pentru orice } x \in H$$

și

$$\| f \| \leqslant \mu$$

este ca

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_i h(x_i) \right| \leqslant \mu \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|, \tag{1}$$

pentru orice șir finit $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de elemente din H și orice șir finit de numere $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$.

Demonstrație. Condiția este necesară. Dacă funcționala f există,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \right| = \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \right| \leqslant \| f \| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant \mu \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

Condiția este suficientă. Fie G mulțimea elementelor de forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ cu $x_i \in H$ și a_i numere din corpul K.

Mulțimea G este un subspațiu vectorial al lui E, numit acoperirea liniară a mulțimii H. Pe G putem defini o funcțională liniară g prin relația

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i), \text{ dacă } y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Într-adevăr g este aditivă și omogenă; dacă

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \text{ și } y' = \sum_{k=1}^{m} a_i' x_i',$$

atunci

$$g(y + y') = \sum_{j=1}^{n+m} a_j h(x_j),$$

unde $a_j = a_i$ și $x_j = x_k$ pentru $j = 1, \ldots, n$ și $a_j = a'_i$ și $x_j = x'_k$, pentru $j = n + k$, $k = 1, \ldots, m$, de unde rezultă

$$g(y + y') = \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) + \sum_{k=1}^{m} a'_k h(x'_k) = g(y) + g(y')$$

și

$$g(ay) = \sum_{i=1}^{n} a\, a_i h(x_i) = a \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) = a\, g(y).$$

Dacă este verificată condiția (1), funcționala g este univocă: pentru

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{k=1}^{m} a'_k x'_k,$$

avem, prin ipoteză,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) - \sum_{k=1}^{m} a'_k h(x'_k) \right| \leqslant \mu \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{k=1}^{m} a'_k x'_k \right\| = 0.$$

De asemenea, g este mărginită:

$$|g(y)| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i h(x_i) \right| \leqslant \mu \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \mu \| y \|,$$

de unde

$$\| g \|_G \leqslant \mu.$$

Funcționala g se poate prelungi pe tot spațiul E, fără să-și majoreze norma. Dacă notăm cu f funcționala astfel obținută, teorema este complet demonstrată.

Cazul cînd mulțimea H este un șir de elemente are un rol important în aplicații.

Teorema 4. *Fie H o parte nevidă a unui spațiu vectorial normat E și un element arbitrar $x_0 \in E$.*

Condiția necesară și suficientă ca să existe un șir de combinații liniare

$$\left(y_n = \sum_{i=1}^{n} a_{n_i} x_i \right)_{n \in N}$$

de elemente $x_i \in H$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - x_0 \| = 0,$$

este ca egalitățile

$$f(x) = 0$$

pentru fiecare $x \in H$ să implice

$$f(x_0) = 0$$

oricare ar fi funcționala liniară mărginită f definită pe E.

Demonstrație. Condiția este necesară. Într-adevăr condiția $f(x) = 0$ pentru orice $x \in H$ implică

$$f(y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{n_i} f(x_i) = 0$$

și prin urmare, f fiind continuă,

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = 0.$$

Condiția este suficientă. Fie G mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite cu elemente din H (acoperirea liniară a mulțimii H). Evident G este un subspațiu vectorial al lui E.

Dacă x_0 ar fi la o distanță $d > 0$ de G, în virtutea teoremei precedente, ar exista o funcțională liniară mărginită f definită pe E astfel ca

$f(x_0) = 1$ și $f(y) = 0$, pentru orice $y \in G$.

Însă a doua condiție implică $f(x) = 0$ pentru orice $x \in H \subset G$, dar prin ipoteză rezultă $f(x_0) = 0$, contrar primei condiții.

Deci x_0 este la distanță nulă de G și prin urmare există un șir y_n de elemente din G astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n - x_0 \| = 0.$$

Teorema este astfel demonstrată.

Teorema 5. *Fie E un spațiu vectorial normat și M o mulțime nevidă de elemente din E.*

Condiția necesară și suficientă ca acoperirea liniară a mulțimii M să fie densă în E este ca singura funcțională liniară și continuă care se anulează pentru orice element din M să fie funcțională identic nulă.

Demonstrație. Fie $L(M)$ acoperirea liniară a mulțimii M.

Condiția este necesară. Dacă o funcțională liniară se anulează pe M, atunci ea se anulează pe orice combinație liniară cu elemente din M și, datorită continuității, pe închiderea mulțimii combinațiilor liniare, $\overline{L(M)} = E$.

Condiția este și suficientă. Dacă $\overline{L(M)} \neq E$, atunci există o funcțională liniară și continuă, neidentic nulă, însă nulă pentru orice element din $\overline{(LM)}$ (teorema 2).

Teorema 6. *Fie E un spațiu vectorial normat real, $C \subset E$ o mulțime convexă și x_0 un element din complementara închiderii mulțimii C. Atunci există o funcțională liniară și continuă f definită pe E astfel ca*

$$\sup_{x \in C} f(x) < f(x_0).$$

Demonstrație. *a*) În primul rînd presupunem că mulțimea C este deschisă și conține elementul 0.

Dacă $x \in E$, fie $\varphi(x)$ marginea inferioară a numerelor reale pozitive λ pentru care $x \in \lambda C$. Funcționala astfel definită are următoarele proprietăți evidente:

1) $0 \leqslant \varphi(x) < \infty$, pentru orice $x \in E$;
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$, pentru orice $x \in E$ și $\alpha \geqslant 0$, real;
3) $\varphi(x) \leqslant 1$, pentru orice $x \in C$.

De asemenea funcția φ are și proprietatea

4) $\varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$, pentru orice $x, y \in E$.

Într-adevăr, dacă presupunem că există $x, y \in E$, astfel ca

$$\varphi(x + y) > \varphi(x) + \varphi(y),$$

există numerele reale $\alpha > 0$, $\beta > 0$, astfel ca

$$\varphi(x + y) > \alpha + \beta, \quad x \in \alpha C, \quad y \in \beta C. \tag{2}$$

De aici deducem $\frac{1}{\alpha} x \in C$, $\frac{1}{\beta} y \in C$, deci

$$\frac{1}{\alpha + \beta}(x + y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{1}{\alpha} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{1}{\beta} y \in C$$

$$x + y \in (\alpha + \beta) C.$$

Aceasta înseamnă însă

$$\varphi(x + y) \leqslant \alpha + \beta,$$

ceea ce contrazice relația (2) și proprietatea 4) este demonstrată.

Fie acum G subspațiul liniar generat de elementul x_0 (mulțimea elementelor de forma ax_0 cu a real oarecare) și τ marginea superioară a numerelor μ pentru care $\mu x_0 \in C$.

Definim pe G o funcțională g prin egalitatea

$$g(ax_0) = \frac{a}{\tau}.$$

Funcționala g este evident aditivă și omogenă și

$$g(x) \leqslant \varphi(x), \text{ pentru orice } x \in G.$$

În virtutea teoremei 3, există o funcțională liniară f definită pe E, astfel încît

$$\varphi(x) \geqslant f(x), \text{ pentru orice } x \in E$$

și

$$f(x) = g(x), \text{ pentru orice } x \in G.$$

Funcționala f este și continuă, deoarece

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant 1, \text{ pentru orice } x \in C.$$

De asemenea

$$f(x_0) = g(x_0) = \frac{1}{\tau} > 1,$$

pentru că dacă $\tau \geqslant 1$, am avea $\lambda x_0 \in C$ cu $\lambda < 1$, de unde ar rezulta $x_0 \in \overline{C}$. Deci

$$\sup_{x \in C} f(x) \leqslant 1 < f(x_0).$$

b) În al doilea rînd presupunem că mulțimea C este deschisă și nevidă. Atunci, există $y_0 \in C$.

Punînd $C' = -y_0 + C$ și $x'_0 = x_0 - y_0$ sîntem în cazul *a*), deci există o funcțională liniară și continuă f definită pe E astfel ca

$$\sup_{x \in C'} f(x) < f(x'_0).$$

De aici deducem imediat

$$\sup_{x \in C} f(x) < f(x_0).$$

c) În cazul general (cînd mulțimea C nu este presupusă deschisă), considerăm un număr $r > 0$ astfel ca $S(x_0; 2r) \subset \complement \overline{C}$. Atunci mulțimea $C_1 = S(0; r) + C$ este convexă și deschisă, și $x_0 \in \complement \overline{C}_1$. Conform celor spuse la punctul *b*) există o funcțională liniară și continuă f, astfel ca

$$\sup_{x \in C_1} f(x) < f(x_0).$$

Însă $C \subset C_1$, deci teorema este complet demonstrată.

T e o r e m a 7. *Fie E un spațiu vectorial normat, $C \subset E$ o mulțime rară convexă și astfel încît $\overline{C} \subset C$.*

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcțională liniară și continuă, f, definită pe E, astfel încît

$$\|f\| = 1 \text{ și } \sup_{x \in C} |f(x)| < \varepsilon.$$

D e m o n s t r a ț i e. Mulțimea C fiind rară, există un element $x_0 \in \complement \overline{C}$, astfel ca $\|x_0\| < \varepsilon$.

În baza teoremei precedente, există o funcțională liniară și continuă g definită pe E cu proprietatea

$$\sup_{x \in C} g(x) < g(x_0).$$

Dacă punem $f = \frac{1}{\|g\|} g$, funcționala f verifică teorema. Într-adevăr $\|f\| = 1$ și

$$\sup_{x \in C} |f(x)| = \sup_{x \in C} f(x) = \frac{1}{\|g\|} \sup_{x \in C} g(x) < \frac{1}{\|g\|} g(x_0) \leqslant \|x_0\| < \varepsilon.$$

Teorema 8. *Fie B un spațiu Banach parțial-ordonat astfel ca* int $B_+ \neq \emptyset$ *și G un semigrup liniar astfel ca* $G \cap$ int $B_+ = \emptyset$. *Atunci există o funcțională* $f \in B^*$, $f \neq 0$, *satisfăcînd inegalitățile*

$$f(x) \begin{cases} \geqslant 0 \text{ pentru } x \in B_+ \\ \leqslant 0 \quad „ \quad x \in G. \end{cases}$$

Demonstrație. Însemnăm prin C mulțimea tuturor elementelor z de forma

$$z = x - y \text{ cu } x \in B_+, \ y \in G.$$

Evident că C este un semigrup liniar în B și definește deci o ordine parțială pentru care mulțimea elementelor pozitive coincide cu C. De asemenea avem relația

$$C \supset B_+ \text{ (făcînd } y = 0 \text{ în } z)$$

de unde rezultă că int $C \neq \emptyset$.

Putem aplica deci teorema din paragraful 3 din care rezultă existența unei funcționale $f \in B^*$, $f \neq 0$, astfel că

$$f(z) \geqslant 0, \text{ pentru } z \in C.$$

Evident că pentru $y = 0$, deci $z \in B_+$, avem

$$f(z) = f(x) \geqslant 0$$

și pentru $x = 0$, deci $z \in -G$,

$$f(z) = -f(y) \leqslant 0$$

și teorema este demonstrată.

Corolar. În aceleași condiții ca în teorema 8 dacă G este subspațiu liniar, există o funcțională pozitivă, care se anulează pentru toate elementele din G, adică $f(G) = 0$.

Demonstrație. Este suficient să observăm că $f(x) \leqslant 0$, pentru orice $x \in G$, implică $f(-x) = -f(x) \geqslant 0$, deci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in G$.

Teorema 9. *Fie B un spațiu Banach parțial-ordonat și un element $x_0 \in B$ situat la o distanță $d > 0$ de B_+. Atunci există o funcțională $f \in B_+^*$, $f \neq 0$,* astfel ca

$$f(x_0) \leqslant -d \, \|f\|.$$

Dacă, în plus, int $B_+ = \emptyset$, *atunci pentru orice element y_0 din frontiera mulțimii B_+, există o funcțională pozitivă $f \in B^*$, astfel încît*

$$f(y_0) = 0.$$

Demonstrație. Fie x_0 un element situat la distanța $d > 0$ de B_+. Însemnăm prin G mulțimea elementelor z de forma

$$z = \lambda(x_0 + u),$$

unde $\| u \| < d$ și $\lambda > 0$. Mulțimea G este un semigrup liniar : dacă $\mu > 0$ atunci $\mu z = \mu \lambda (x_0 + u) = \lambda_1 (x_0 + u)$ cu $\lambda_1 > 0$, deci de aceeași formă cu z; dacă

$$z_1 = \lambda_1 (x_0 + u_1),\ z_2 = \lambda_2 (x_0 + u_2)$$
$$\lambda_1,\ \lambda_2 > 0,\ \| u_1 \| < d,\ \| u_2 \| < d$$

atunci

$$z_1 + z_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\, x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)\ (x_0 + u'),$$

unde

$$u' = \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_2)} (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$$

deci

$$\| u' \| \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \| u_1 \| + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \| u_2 \| < \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} d + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} d = d.$$

De asemenea, int $G \neq \theta$ pentru că punctele

$$x_0 + u \quad \text{cu} \quad \| u \| < d$$

constituie o sferă de rază d cu centrul în x_0.
G nu are în comun cu B_+ decît elementul 0, pentru că

$$\| z - \lambda\ x_0 \| = \| \lambda u \| < \lambda d$$

și dacă $\| y - x_0 \| > d$, pentru orice $y \in B_+$, atunci

$$\| y - \lambda x_0 \| = \lambda \| \frac{1}{\lambda} y - x_0 \| > \lambda d,$$

pentru orice $y \in B_+$.

Aplicînd teorema 8, există o funcțională $f \in B^*$, nenegativă pe B_+, și astfel ca

$$f(z) = \lambda f (x_0 + u) \leqslant 0,$$

de unde rezultă

$$f(x_0) \leqslant - \sup_{\|u\| < d} f(u) = - d \| f \|.$$

Dacă, în plus, int $B_+ \neq \theta$, și y_0 este conținut în frontiera lui B_+, luăm ca G mulțimea punctelor

$$y = \lambda y_0 \text{ cu } \lambda \geqslant 0.$$

Aplicînd din nou teorema 8, găsim o funcțională f nenegativă pe B_+, astfel ca

$$f(y_0) \leqslant 0.$$

Cum semnul $<$ este exclus în acest caz, rezultă

$$f(y_0) = 0.$$

Corolarul 1. Pentru ca $x \in \bar{B}_+$ este necesar și suficient ca $f(x) \geqslant 0$, pentru orice $f \in B_+^*$.

Corolarul 2. Pentru ca $x \in \operatorname{int} B_+$ este necesar și suficient ca $f(x) > 0$, pentru orice $f \in B_+^*$.

Teorema 10. *Într-un spațiu Banach parțial-ordonat, pentru orice element* $x \in \bar{B}_+$ *astfel ca* $-x \in \complement \bar{B}_+$, *există o funcțională pozitivă* $f \in B_+^*$, *astfel încît*

$$f(x) > 0.$$

Demonstrație. În aceste condiții, elementul x se găsește la o distanță $d > 0$ de B_+.

Aplicînd teorema 9 există o funcțională $f \in B_+^*$, astfel încît

$$f(-x) < 0.$$

§ 6. Prelungirea funcționalelor biliniare

1. În acest paragraf vom utiliza procedeul de liniarizare descris la capitolul II, paragraful 7, pentru studiul prelungirii funcționalelor biliniare continue.

După cum am văzut, putem face o corespondență biunivocă între funcționalele biliniare definite pe suma directă a două spații vectoriale E_1 și E_2 și funcționalele liniare definite pe produsul direct al spațiilor E_1 și E_2. Vom putea aplica deci teorema prelungirii operațiilor liniare continue, dacă normăm produsul direct (tensorial) printr-o normă adecvată.

Definiția 1. *Fie* E_1 *și* E_2 *două spații vectoriale normate și* $E_1 \times E_2$ *produsul lor tensorial.*

Dacă expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ *aparține clasei* $\bar{x} \in E_1 \times E_2$, *numim normă a elementului* $\bar{x}$, *numărul*

$$\| \bar{x} \| = \sup_{\substack{f_1 \in E_1^* \\ f_2 \in E_2^*}} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i) \right|}{\| f_1 \| \cdot \| f_2 \|}, \tag{1}$$

unde E_1 *și* E_2 *sînt mulțimile funcționalelor liniare continue definite, respectiv pe* E_1 *și* E_2.

Observație. În capitolul următor vom defini pe E_1^* și E_2^* ca spații Banach, însă acest fapt nu are aici nici un rol.

Pentru justificarea definiției demonstrăm

Teorema 1. *Expresia* (1) *este o normă în spațiul vectorial* $E_1 \times E_2$. *Dacă elementul* $\bar{x} \in E_1 \times E_2$ *conține o expresie de forma* $x \times y$, *atunci* $\| \bar{x} \| = \| x \| \cdot \| y \|$.

Demonstrație. În primul rînd, numărul $\bar{x}$ este bine definit, deoarece nu depinde de reprezentantul $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ al clasei $\bar{x}$ considerate. Într-adevăr, suma

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i)$$

este o funcțională biliniară, deci are aceeași valoare pentru toate elementele unei aceleiași clase de echivalență $\bar{x}$.

Să verificăm acum condițiile normei.

Prima parte a condiției III_1 este imediată, pentru că orice funcțională biliniară se anulează pe expresia 0×0. Invers, dacă suma

$$\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i)$$

se anulează pentru orice $f_1 \in E_1^*$, și $f_2 \in E_2^*$ expresia $\sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$ este echivalentă cu 0×0. Într-adevăr, să presupunem că mulțimile $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E_1$, $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset E_2$ sînt liniar independente și conțin elemente diferite de 0, de exemplu $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$. Atunci există o funcțională $f_1^{(0)} \in E_1^*$ astfel ca

$$f_1^{(0)}(x_1) \neq 0$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(0)}(x_i) y_i \neq 0.$$

De aici rezultă însă că există o funcțională $f_2^{(0)} \in E_2$, astfel ca

$$\sum_{i=1}^{n} f_1^{(0)}(x_i) f_2^{(0)}(y_i) = f_2^{(0)}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1^{(0)}(x_i) y_i\right) \neq 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Deci condiția III_1 este complet demonstrată.

Condiția III_2 rezultă din inegalitatea

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i) + \sum_{j=1}^{m} f_1(x_j) f_2(y_j)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i)\right| + \left|\sum_{j=1}^{m} f_1(x_j) f_2(y_j)\right|.$$

și condiția III_3 este evidentă.

Ultima parte a teoremei rezultă din inegalitatea

$$\frac{|f_1(x) f_2(y)|}{\|f_1\| \cdot \|f_2\|} \leqslant \frac{\|f_1\| \cdot \|x\| \cdot \|f_2\| \cdot \|y\|}{\|f_1\| \cdot \|f_2\|} \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. Așa cum am arătat și în capitolul I, paragraful 6, produsul tensorial se poate norma și în alte moduri. Motivul pentru care am ales expresia (1) este următoarea teoremă.

T e o r e m a 2. *Fie E_1, E_2 două spații vectoriale normate și, respectiv, $L_1 L_2$, două subspații vectoriale.*

Pentru elementele x conținute în $L_1 \times L_2$, norma (1) calculată în $L_1 \times L_2$ este aceeași cu norma (1) calculată în $E_1 \times E_2$.

D e m o n s t r a ț i e. Afirmația teoremei revine la următoarea egalitate

$$\sup_{\substack{f_1 \in L_1^* \\ f_2 \in L_2^*}} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i) \right|}{\| f_1 \| \cdot \| f_2 \|} = \sup_{\substack{f_1 \in E_1^* \\ f_2 \in E_2^*}} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i) \right|}{\| f_1 \| \cdot \| f_2 \|}$$

care rezultă din faptul că oricărei funcționale liniare continue definite pe un subspațiu îi corespunde o funcțională liniară continuă definită pe tot spațiul și, invers, restricția la subspațiu a oricărei funcționale liniare continue definite pe întreg spațiul, este funcțională liniară continuă definită pe subspațiu.

3. Fie acum o funcțională biliniară continuă, $F(x, y)$, definită pe subspațiile L_1 și L_2 ale spațiilor E_1 și E_2 respectiv.

Continuitatea funcționalei F nu implică neapărat și continuitatea prelungirii ei pe produsul direct $L_1 \times L_2$. De aceea vom studia numai o categorie specială de funcționale biliniare, care satisfac această ultimă condiție.

D e f i n i ț i a 2. *Fie E_1 și E_2 două spații vectoriale normate și $F(x, y)$ o funcțională biliniară definită pe ele ($x \in E_1$, $y \in E_2$).*

Funcționala F se numește hipercontinuă, dacă prelungirea liniară a ei, $\overline{F}$, definită pe produsul tensorial $E_1 \times E_2$ este continuă față de norma (1) și are aceeași normă ca F.

Această definiție revine la următoarea relație:
inegalitatea

$$|F(x, y)| \leqslant M \| x \| \cdot \| y \| \qquad x \in E_1, \; y \in E_2$$

implică

$$\left| \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i) \right| \leqslant M \sup_{\substack{f_1 \in E_1^* \\ f_2 \in E_2^*}} \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(y_i) \right|}{\| f_1 \| \cdot \| f_2 \|}.$$

Ținînd seamă de teoremele de prelungire pentru funcționalele liniare continue, putem enunța

T e o r e m a 3. *Fie E_1 și E_2 două spații vectoriale normate și L_1, L_2 două subspații vectoriale respective. Orice funcțională biliniară hipercontinuă $F(x, y)$ definită pe L_1 și L_2 ($x \in L_1$, $y \in L_2$) se poate prelungi pe E_1 și E_2 fără să-și majoreze norma.*

D e m o n s t r a ț i e. Funcționalei F îi corespunde funcționala liniară $\overline{F}$, definită pe $L_1 \times L_2$ și continuă. $\overline{F}$ se poate prelungi pe tot spațiul

$E_1 \times E_2$, printr-o funcțională Φ, fără majorarea normei. Prelungirea funcționalei F pe E_1 și E_2 va fi restricția funcționalei Φ, la elementele $x \in E_1 \times E_2$ care conțin expresii de forma $x \times y$ ($x \in E_1$, $y \in E_2$).

De asemenea avem și.

Teorema 4. *Fie E_1 și E_2 două spații vectoriale normate. Pentru orice pereche de elemente, $x \in E_1$, $y \in E_2$ există o funcțională biliniară hipercontinuă $F(x, y)$, astfel încît*

$$F(x, y) = \| x \| \cdot \| y \|.$$

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Prima teoremă de prelungire a funcționalelor liniare și care a jucat rolul cel mai important în studiul spațiilor vectoriale normate, a fost dată de H. Hahn [128]. Aceasta este teorema 2, paragraful 2.

Teorema lui Hahn a fost generalizată de S. Banach, ca un caz particular al teoremei 3, paragraful 2 (cînd laticea vectorială completă E' este chiar dreapta reală R). Teorema lui Banach este expusă în cartea sa [5].

Teorema 3 și teorema 4, paragraful 2, sînt noi și au fost demonstrate de autorul acestei cărți.

2. Cercetări asupra prelungirii operațiilor liniare oarecare au fost întreprinse de A. Akilov [29].

Noțiunile din paragraful 1 și teorema 1, paragraful 2, se datoresc lui L. Nachbin [212].

3. Prelungirea funcționalelor pozitive a fost studiată de matematicienii sovietici. Teorema 1, paragraful 3, este generalizarea unei teoreme expuse în lucrarea [187] de M. G. Krein și M. A. Rutman.

4. Teorema de prelungire a funcționalelor complexe a fost demonstrată de G. A. Suchomlinov [246] și de H. F. Bohnenblust și A. Sobczyk [59].

5. Prelungirea funcționalelor biliniare a fost studiată de G. Marinescu [195], [196].

CAPITOLUL IV

SPAȚIUL CONJUGAT

Mulțimea funcționalelor liniare continue definite pe un spațiu vectorial normat E poate fi organizată ca spațiu Banach. Acest spațiu care se numește spațiu conjugat cu E și se notează cu E^* are un rol foarte important în teoria spațiilor vectoriale normate, în special datorită faptului că prin intermediul lui se poate stabili un calcul diferențial și integral în spațiile vectoriale normate și o teorie a funcțiilor analitice și pentru că ușurează studiul ecuațiilor liniare.

Mulțimea funcționalelor liniare este studiată și într-un cadru mai general, al spațiilor vectoriale local convexe.

În capitolul de față sînt expuse proprietățile generale ale spațiului conjugat. În afară de topologia de spațiu Banach, în spațiul conjugat se pot introduce și alte topologii, dintre care noi examinăm, în măsura în care este necesară pentru restul cărții, topologia slabă. De asemenea, introducem o topologie slabă într-un spațiu vectorial normat oarecare și studiem ordonarea spațiilor conjugate cu spații vectoriale normate ordonate.

§ 1. Spațiile operațiilor liniare. Spațiul conjugat

1. Definiția 1. *Fie E un spațiu vectorial normat și B un spațiu Banach. Vom nota cu $\mathfrak{L}(E, B)$ mulțimea operațiilor liniare continue definite pe E și cu valori în B. Numim topologie tare, sau topologia normei în $\mathfrak{L}(E, B)$ topologia indusă de norma operațiilor*

$$\| T \| = \sup_{\substack{\| x \| \leqslant 1 \\ x \in E}} \| T(x) \| \tag{1}$$

Teoremă. *Spațiul $\mathfrak{L}(E, B)$ normat cu norma (1) este un spațiu Banach.*

Demonstrație. Este evident că $\mathfrak{L}(E, B)$ este un spațiu vectorial, cu operațiile

$$T_1 + T_2 \text{ și } aT \quad (a \in K),$$

definite astfel:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

$$(aT)(x) = aT(x).$$

Vom arăta acum că expresia (1) este o normă și că spațiul $\mathfrak{L}(E, B)$ este complet în topologia dată de această normă.

1) Verificăm condițiile normei:

III_1. $T(x) = 0$ implică $\| T \| = 0$ și invers,

pentru că

$$\| T(x) \| \leqslant \| T \| \cdot \| x \|.$$

III_2. $$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_1(x) + T_2(x) \| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_1(x) \| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_2(x) \|$$

de unde

$$\| T_1 + T_2 \| \leqslant \| T_1 \| + \| T_2 \|.$$

III_3. $$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| aT(x) \| = |a| \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T(x) \|$$

deci

$$\| aT \| = |a| \cdot \| T \|.$$

2) Spațiul $\mathfrak{L}(E, B)$ este complet. Fie $\{T_n\}$ un șir Cauchy de elemente din $\mathfrak{L}(E, B)$, adică un șir de operații satisfăcînd condiția

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_n(x) - T_m(x) \| < \varepsilon, \text{ dacă } n, m \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Deoarece spațiul B este complet, pentru orice $x \in E$, cu $\| x \| \leqslant 1$, există un element $T(x) \in B$ astfel ca

$$\| T_n(x) - T(x) \| < 2\varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Prin urmare, există o operație T definită pe sfera unitate a spațiului E, astfel încît

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_n(x) - T(x) \| < 2\varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Operația T este omogenă. Într-adevăr, fie $a \in K$, $|a| \leqslant 1$; atunci, dacă $\| x \| \leqslant 1$,

$$\| ax \| = |a| \cdot \| x \| \leqslant 1$$

și

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T(ax) - aT(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T(ax) - T_n(ax) \| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| T_n(ax) - aT_n(x) \| +$$

$$+ \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| aT_n(x) - aT(x) \| \leqslant 4\varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

deci

$T(ax) = aT(x)$, pentru orice $a \in K$ și $x \in E$ cu $|a| \leqslant 1$ și $\| x \| \leqslant 1$.

Operația T se poate prelungi pe tot spațiul E prin relația

$$T(y) = \|y\| T\left(\frac{1}{\|y\|} y\right), \text{ pentru orice } y \in E, \text{ cu } \|y\| > 1.$$

Operația astfel obținută este omogenă

$$T(ay) = |a| \cdot \|y\| \cdot T\left(\frac{a}{|a|} \cdot \frac{1}{\|y\|} y\right) = a \|y\| T\left(\frac{1}{\|y\|} y\right) = aT(y)$$

pentru că

$$\left|\frac{a}{|a|}\right| = 1 \text{ și } \frac{1}{\|y\|} < 1.$$

Ea este și aditivă; fie $x, y \in E$, $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$, $\|x+y\| \leqslant 1$; atunci

$$\begin{aligned} \|T(x+y) - T(x) - T(y)\| &\leqslant \|T(x+y) - T_n(x) - T_n(y)\| + \\ &+ \|T_n(x) + T_n(y) - T(x) - T(y)\| \leqslant \\ &\leqslant \|T(x+y) - T_n(x+y)\| + \|T_n(x) - T(x)\| + \|T_n(y) - \\ &- T(y)\| \leqslant 6\,\varepsilon. \end{aligned}$$

dacă $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, de unde rezultă

$$T(x+y) = T(x) + T(y).$$

Fie acum x și y oarecare în E și

$$0 < a \leqslant \min\left(\frac{1}{\|x\|}, \frac{1}{\|y\|}, \frac{1}{\|x+y\|}\right).$$

Atunci elementele ax, ay, $a(x+y)$ aparțin sferei închise de rază 1 cu centrul în 0.

Deoarece

$$T(ax) = aT(x),\ T(ay) = aT(y),$$
$$T(a(x+y)) = aT(x+y)$$

și

$$T(ax+ay) = T(ax) + T(ay),$$

rezultă

$$aT(x+y) = aT(x) + aT(y),$$

deci

$$T(x+y) = T(x) + T(y).$$

Se vede ușor că operația T este și continuă, deoarece, dacă $\|x\| \leqslant 1$,

$$\|T(x)\| \leqslant \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x)\|,$$

deci, pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\|T(x)\| \leqslant 2\,\varepsilon + \|T_{n_0(\varepsilon)}(x)\|.$$

În consecință, condiția

$$\lim_{n,m\to\infty} \| T_n - T_m \| = 0$$

implică existența unei operații $T \in \mathfrak{L}(E, B)$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0,$$

deci $\mathfrak{L}(E, B)$ este complet.

Teorema este demonstrată.

2. O importanță deosebită o are spațiul $\mathfrak{L}(E, K)$, adică spațiul funcționalelor liniare continue definite pe E.

Definiția 2. *Fie E un spațiu vectorial normat. Numim spațiu conjugat spațiului E și notăm cu E^*, spațiul funcționalelor liniare continue definite pe E.*

E^* normat cu norma funcționalelor este un spațiu Banach.

Spațiul conjugat spațiului E^*, adică spațiul funcționalelor definite pe E^*, se notează E^{**}.

§ 2. Produs scalar. Ortogonalitate

1. Dacă E este un spațiu vectorial normat și E^* spațiul conjugat, este definită în mod natural o funcțională biliniară continuă pe produsul cartezian $E \times E^*$.

Definiția 1. *Fie x un element oarecare din spațiul vectorial normat E și f o funcțională, adică un element din E. Elementului (x, f) din produsul cartezian $E \times E^*$ îi corespunde în mod natural numărul $f(x) \in K$, pe care îl numim produsul scalar între x și f.*

Vom nota de multe ori acest produs scalar $\langle x, f\rangle$.

Teorema 1. *Produsul scalar este o funcțională biliniară continuă definită pe $E \times E^*$ și având norma 1.*

Demonstrație. Fie $f_0 \in E^*$; atunci produsul $\langle x, f_0\rangle$ coincide prin definiție cu $f_0(x)$, pentru orice $x \in E$. Deci corespondența

$$(x, f_0) \to \langle x, f_0\rangle$$

coincide cu funcționala liniară continuă f_0. Invers, dacă x_0 este un element constant din E, corespondența

$$(x_0, f) \to \langle x_0, f\rangle$$

este o funcțională liniară definită pe E.

Într-adevăr, această funcțională este aditivă, pentru că

$$\langle x_0, f_1 + f_2\rangle = (f_1 + f_2)(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) =$$
$$= \langle x_0, f_1\rangle + \langle x_0, f_2\rangle,$$

este și omogenă, întrucît

$$\langle x_0, af\rangle = (af)(x_0) = af(x_0) = a\langle x_0, f\rangle.$$

Continuitatea rezultă din relația

$$|\langle x, f\rangle| = |f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|.$$

Tot din această relație se vede că norma funcționalei $\langle x, f\rangle$ este 1.

Definiția 2. *Dacă* $x \in E$, $f \in E^*$ *și* $\langle x, f \rangle = 0$, *vom spune că* x *și* f *sînt ortogonale.*

2. Din demonstrația teoremei 1 reiese imediat și

Teorema 2. *Spațiul vectorial normat* E *este izomorf din punct de vedere algebric și al normei cu un subspațiu vectorial al spațiului* E^{**}.

Demonstrație. Am văzut că fiecărui $x_0 \in E$ îi corespunde o funcțională liniară și continuă

$$\langle x_0, f \rangle$$

definită pe E^*. Notăm această funcțională cu X_0 și avem, evident,

$$X_0(f) = \langle x_0, f \rangle = f(x_0),$$

pentru orice $f \in E^*$.

Corespondența $x \to X$ este biunivocă: într-adevăr, dacă elementului $x_0 \in E$ i-ar corespunde două funcționale X_0 și $X_0' \in E^{**}$, am avea

$$X_0(f) = X_0'(f) = f(x_0),$$

pentru orice $f \in E^*$, deci $X_0 = X_0'$; invers, nu pot exista două elemente diferite, x_0 și $x_1 \in E$, astfel ca $\langle x_0, f \rangle = \langle x_1, f \rangle$, pentru orice $f \in E^*$, pentru că aceasta ar însemna

$$\langle x_0 - x_1, f \rangle = 0, \text{ pentru orice } f \in E^*$$

deci

$$x_0 - x_1 = 0 \text{ (teorema 1, cap. III, § 5).}$$

Corespondența $x \to X$ este evident aditivă. În ceea ce privește normele, pe de o parte avem

$$\| X \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | X(f) | = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | \langle x, f \rangle | \leqslant \| x \|$$

și de altă parte există o funcțională $f \in E^*$, astfel ca

$$\langle x, f \rangle = f(x) = \| x \| \text{ și } \| f \| = 1,$$

deci

$$\| X \| = \| x \|.$$

Teorema este astfel complet demonstrată.

Se scrie de multe ori $E \subset E^{**}$, *făcîndu-se abstracție de izomorfismul dovedit în teorema 2.*

Un caz important este evident acela pentru care E este izomorf chiar cu E^{**}.

Definiția 3. *Dacă* E *coincide cu* E^{**}, *abstracție făcînd de un izomorfism algebric și în normă, spațiul vectorial normat* E *se numește reflexiv.*

Evident că orice spațiu reflexiv este un spațiu Banach.

O consecință imediată, foarte importantă, pe care o deducem din teorema 3, capitolul II, paragraful 4, este

Teorema 3. *Fie* $\{ x_\alpha \}$ *o mulțime de puncte din spațiul vectorial normat* E. *Dacă*

$$\sup_\alpha | f(x_\alpha) | < \infty,$$

pentru orice $f \in B^*$, *atunci mulțimea* $\{ x_\alpha \}$ *este mărginită.*

Demonstrație. Fie X_α elementul corespunzător lui x_α în E^{**}. Mulțimea $\{X_\alpha(f)\}$ de funcționale definite pe E^* satisface condițiile teoremei 3, capitolul II, paragraful 4, deci mulțimea $\{\|X_\alpha\|\} = \{\|x_\alpha\|\}$ este mărginită.

§ 3. Topologia slabă în spațiul conjugat

1. În afară de normă, care face din E^* un spațiu Banach, se mai impune în mod natural în E^*, o topologie dată de convergența punctuală a funcționalelor.

Definiție. *Fie E un spațiu vectorial normat și E^* conjugatul său.*

Spunem că șirul de funcționale $\{f_n\} \subset E^*$ este slab convergent către funcționala $f \in E^*$, dacă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

sau, cu notația adoptată în paragraful 2,

$$\lim_{n\to\infty} \langle x, f_n\rangle = \langle x, f\rangle, \text{ pentru orice } x \in E.$$

De asemenea, șirul $\{f_n\} \subset E^*$ se numește slab convergent în sensul lui Cauchy, dacă

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle x, f_n - f_m\rangle = 0, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Propoziția 1. *Dacă șirul de funcționale $\{f_n\} \subset E^*$ converge slab către funcționala $f \in E^*$, atunci mulțimea normelor $\{\|f_n\|\}$ este mărginită.*

Demonstrație. Această propoziție este un caz particular al teoremei 5, capitolul II, paragraful 4.

Propoziția 2. *Dacă șirul de funcționale $\{f_n\} \subset E^*$ converge slab către funcționala $f \in E^*$, atunci*

$$\|f\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

Demonstrație. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

atunci și

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)|, \text{ pentru orice } x \in E.$$

Însă

$$|f_n(x)| \leqslant \|f_n\| \cdot \|x\|,$$

pentru orice $x \in E$ și orice $n = 1, 2, \ldots$, deci

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \left(\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|\right) \cdot \|x\|, \text{ pentru orice } x \in E,$$

adică

$$|f(x)| \leqslant \left(\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|\right) \cdot \|x\|.$$

De aici rezultă

$$\|f\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|.$$

Teoremă. *Pentru ca șirul de funcționale* $\{f_n\} \subset E^*$ *să conveargă slab către funcționala* $f \in E^*$ *este necesar și suficient ca să fie îndeplinite următoarele condiții:*
a) șirul normelor $\{\|f_n\|\}$ *este mărginit;*
b) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *pentru orice* x *aparținînd unei mulțimi* G *a cărei acoperire liniară este densă în* E.

Demonstrație. Necesitatea condiției *a*) rezultă din propoziția 1, iar necesitatea condiției *b*) este evidentă.

Condițiile sînt și suficiente: fie

$$M = \sup_n \|f_n\|$$

și x un element oarecare din E. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element x_0 aparținînd acoperirii liniare a mulțimii G, $x_0 \in l.(G)$, astfel ca

$$\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Atunci

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + (\|f_n\| + \|f\|)\|x - x_0\| \leqslant$$
$$\leqslant |f_n(x_0) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Însă, datorită condiției *b*), există indice n_0 astfel ca $n \geqslant n_0$ să implice

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deducem că, pentru $n \geqslant n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

§ 4. Topologia slabă în spațiile vectoriale normate

1. Fie E un spațiu vectorial normat.

În spațiul E^{**} se poate defini topologia slabă conform paragrafului precedent. Considerînd pe E ca un subspațiu vectorial al lui E^{**}, topologia slabă din E^{**} induce o topologie în E, pe care o numim tot topologie slabă. Definiției 1 din paragraful 3 îi corespunde aici următoarea

Definiție. *Fie E un spațiu vectorial normat și E^* conjugatul său. Spunem că șirul de elemente $\{x_n\} \subset E$ este slab convergent către elementul $x \in E$, dacă*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \text{ pentru orice } f \in E^*$$

sau, cu scrierea adoptată în paragraful 2,

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle = \langle x, f\rangle, \text{ pentru orice } f \in E^*.$$

De asemenea, șirul $\{x_n\} \subset E$ se numește slab convergent în sensul lui Cauchy, dacă

$$\lim_{n,m\to\infty} \langle x_n - x_m, f\rangle = 0, \text{ pentru orice } f \in E^*.$$

În mod analog se transpun și propozițiile 1 și 2 din paragraful 3:

Propoziția 1. *Dacă șirul de elemente $\{x_n\} \subset E$ converge slab către elementul $x \in E$, atunci mulțimea normelor $\{\|x_n\|\}$ este mărginită.*

Propoziția 2. *Dacă șirul de elemente $\{x_n\} \subset E$ converge slab către elementul $x \in E$, atunci*

$$\|x\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Ca un caz particular al teoremei din paragraful 3 deducem:

Teorema 1. *Pentru ca un șir de elemente $\{x_n\} \subset E$ să conveargă slab către elementul $x_0 \in E$, este necesar și suficient ca să fie îndeplinite următoarele condiții:*

a) șirul normelor $\{\|x_n\|\}$ este mărginit;

b) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ pentru orice f aparținînd unei mulțimi a cărei acoperire liniară este densă în E^*.

2. În general, convergența slabă nu implică convergența tare. Avem însă

Teorema 2. *Dacă șirul $\{x_n\} \subset E$ converge slab către $x \in E$, atunci există un șir de combinații liniare $\left\{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\}$ care converge tare către x, adică x aparține închiderii acoperirii liniare a șirului $\{x_n\}$.*

Demonstrație. Fie G închiderea mulțimii combinațiilor liniare de forma

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i, \quad x_i \in \{x_n\}.$$

Dacă x nu aparține mulțimii G, atunci există o funcțională $f \in E^*$ astfel încît

$$f(y) = 0, \text{ pentru orice } y \in G$$

și

$$f(x) = 1.$$

Însă atunci $f(x_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, deci șirul $\{f(x_n)\}$ nu converge către $f(x) = 1$, ceea ce contrazice ipoteza că șirul $\{x_n\}$ este slab convergent către x.

Există însă și spații în care convergența tare coincide cu convergența slabă. De exemplu

Teorema 3. *În spațiile vectoriale normate cu un număr finit de dimensiuni, convergența tare coincide cu convergența slabă.*

Demonstrație. Este suficient să arătăm că dacă un șir $\{x_n\}$ este slab convergent către elementul x, atunci el este și tare convergent. Fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ baza algebrică a spațiului E. Avem

$$x_n = a_1^{(n)} x_1 + a_2^{(n)} x_2 + \ldots + a_m^{(n)} x_m,$$

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m.$$

Pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, m$, există o funcțională $f_i \in E^*$, astfel ca

$$f_i(x_i) = 1$$

și

$$f_i(x_k) = 0$$

pentru

$$k \neq i.$$

Atunci

$$f_i(x_n) = a_i^{(n)}$$

și

$$f_i(x) = a_i.$$

Deoarece șirul $\{x_n\}$ converge slab către x,

$$\lim_{n \to \infty} f_i(x_n) = f_i(x),$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} a_i^{(n)} = a_i.$$

De aici rezultă că șirul $\{x_n\}$ converge tare către x.

§ 5. Ordonarea spațiului conjugat

1. În spațiul conjugat al unui spațiu vectorial normat ordonat se introduce, în mod natural, o relație de ordonare.

Definiție. *Fie E un spațiu vectorial normat ordonat și E^* spațiul său conjugat.*

Spunem că funcționala $f \in E^*$ este majorată de funcționala $g \in E^*$ și scriem

$$f \leqslant g$$

dacă, pentru orice $x \in E_+$, avem

$$f(x) \leqslant g(x).$$

Mulțimea funcționalelor $f \in E^*$ pentru care

$$0 \leqslant f$$

coincide cu mulțimea funcționalelor pozitive definite la capitolul II, paragraful 5. Vom nota această mulțime prin E_+^*.

Am văzut (cap. III, § 4) că E_+^* nu este vidă. Vom arăta mai mult, anume

P r o p o z i ț i e. *Mulțimea* E_+^* *este închisă în* E^*.

D e m o n s t r a ț i e. Dacă $\{f_n\} \subset E_+^*$ și

$$\lim_{n \to \infty} \| f - f_n \| = 0,$$

atunci

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

deci, în particular, pentru orice $x \in E_+$.

Deoarece $f_n(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in E_+$, rezultă că și $f(x) \geqslant 0$, deci

$$f \in E_+^*.$$

2. Relația de ordonare din E^* nu este, în general, proprie, pentru că putem avea în același timp

$$f \geqslant 0 \text{ și } -f \geqslant 0.$$

Acest lucru nu se poate întîmpla însă pentru funcționalele strict pozitive.

3. În cazul unei latice vectoriale normate avem următoarea

T e o r e m ă. *Fie* E *o latice vectorială normată și* $\operatorname{int} E_+ \neq \emptyset$. *Atunci* E^* *este o latice Banach.*

D e m o n s t r a ț i e. Este suficient să arătăm că există $\sup(f_1, f_2)$ pentru orice pereche de elemente $f_1, f_2 \in E_+^*$ (vezi cap. I, § 4, propozițiile 9 și 10).

Fie deci $f_1 \in E_+^*$, $f_2 \in E_+^*$. Definim, pe E_+, o funcțională f prin

$$f(x) = \sup_{\substack{u+v=x \\ u,v \in E_+}} (f_1(u) + f_2(v)) \quad (x \in E_+). \tag{1}$$

Prin definiție,

$$f(x) \geqslant f_1(x) \text{ și } f(x) \geqslant f_2(x), \text{ pentru orice } x \in E_+.$$

Vom arăta că f este funcționala căutată.

În primul rînd, să arătăm că f este aditivă și continuă, deci $f \in E^*$. Fie $x_1, x_2 \in E_+$. Avem

$$f(x_1) + f(x_2) = \sup_{\substack{u_1+v_1=x_1 \\ u_1, v_1 \in E_+}} \{f_1(u_1) + f_2(v_1)\} + \tag{2}$$

$$+ \sup_{\substack{u_2+v_2=x_2 \\ u_2, v_2 \in E_+}} \{f_1(u_2) + f_2(v_2)\}$$

deci

$$f(x_1) + f(x_2) = \sup_{\substack{u_1 + v_1 = x_1 \\ u_2 + v_2 = x_2 \\ u_1, v_1, u_2, v_2 \in E_+}} \{f_1(u_1 + u_2) + f_2(v_1 + v_2)\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{u + v = x_1 + x_2 \\ u, v \in E_+}} \{f_1(u) + f_2(v)\} = f(x_1 + x_2). \tag{3}$$

Dacă arătăm că, pentru orice $u,\ v \in E_+,\ x_1,\ x_2 \in E_+$, astfel ca

$$u + v = x_1 + x_2$$

există $u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2 \in E_+$ astfel încît

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2$$
$$x_1 = u_1 + v_1, \quad x_2 = u_2 + v_2, \tag{4}$$

rezultă că

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad (x_1,\ x_2 \in E_+).$$

Pentru aceasta luăm

$$u_1 = \inf(x_1,\ u), \quad u_2 = u - u_1$$
$$v_1 = x_1 - u_1, \quad v_2 = x_2 - u_2$$

și relațiile (4) sînt evidente.

De altă parte este evident că $u_1,\ u_2,\ v_1 \in E_+$, iar pentru v_2 avem

$$v_2 = x_2 - u_2 = x_2 - u + \inf(x_1, u) =$$
$$= \inf(x_1 + x_2 - u,\ x_2) = \inf(v,\ x_2) \in E_+.$$

Deci f este aditivă pe E_+.

Deoarece E este decompozabil, orice $x \in E$ este de forma

$$x = u - v \quad \text{cu} \quad u,\ v \in E_+.$$

Atunci funcționala f se poate prelungi pe întreg spațiul E, cu păstrarea aditivității, prin relația

$$f(x) = f(u) - f(v), \quad (x \in E).$$

Continuitatea funcționalei f rezultă din faptul că este nenegativă și aditivă (teorema din cap. II, § 5), astfel că $f \in E_+^*$.

Rămîne să mai arătăm că $f = \sup(f_1,\ f_2)$.

Am văzut, din definiție, că

$$f \geqslant f_1,\ f \geqslant f_2.$$

Fie acum

$$f' \geqslant f_1,\ f' \geqslant f_2.$$

Atunci

$$f_1(u) + f_2(v) \leqslant f'(u) + f'(v) = f'(x)$$

pentru orice

$$x \in E_+,\ x = u + v,\ u,\ v \in E_+,$$

deci

$$f'(x) \geqslant f(x), \text{ pentru orice } x \in E_+,$$

adică

$$f' \geqslant f.$$

Teorema este demonstrată.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Spațiul conjugat a fost introdus și studiat de S. Banach.

După apariția cărții lui Banach s-au întreprins multe cercetări asupra spațiului conjugat, în special în legătură cu spațiile reflexive.

Deoarece aceste cercetări nu țin neapărat de structura de spațiu normat, ci sînt întreprinse într-un cadru mai general, nu sînt expuse în această carte. Menționăm că lucrări foarte importante în această direcție au fost date de matematicienii sovietici V. Smulian, M. G. Krein, D. P. Milman și alții.

Cercetări asupra spațiilor reflexive au fost întreprinse și de Al. Ghika [107].

2. Ordonarea spațiului conjugat a fost studiată de matematicienii sovietici și este expusă în lucrarea [187] de M. G. Krein și M. A. Rutman.

CAPITOLUL V

OPERAȚIA ADJUNCTĂ

Relațiile dintre un spațiu vectorial normat și conjugatul său permit ca operațiile liniare să poată fi studiate, paralel, în cele două spații, asociindu-se unei operații din spațiul E o operație în E^*, numită operația adjunctă.

Obiectul acestui capitol este studiul operației adjuncte și în special al rolului pe care îl are în teoria ecuațiilor liniare.

§ 1. Definiția operației adjuncte

Definiție. *Fie E și E_1 două spații vectoriale normate și E^*, E_1^*, respectiv, spațiile conjugate.*

Dacă T este o operație liniară continuă definită pe E și cu valori în E_1, definim operația T pe E_1^* și cu valori în E^* prin relația

$$\langle x,\ T(g)\rangle = \langle T(x),\ g\rangle,$$

unde $x \in E$ și $g \in E_1^*$.

Operația T^* se numește adjuncta operației T.

Teorema 1. *Operația adjunctă T^* este o operație liniară continuă și*

$$\| T^* \| = \| T \|.$$

Demonstrație. Este evident că operația T^* este liniară.

Din relația

$$|\langle x,\ T^*(g)\rangle| = |\langle T(x),\ g\rangle| \leqslant \| g \| \cdot \| T(x) \| \leqslant \| g \| \cdot \| T \| \cdot \| x \|$$

rezultă că T^* este continuă și

$$\| T^* \| \leqslant \| T \|.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Există $x_0 \in E$ astfel ca $\| x_0 \| \leqslant 1$, $\| T(x_0) \| > \| T \| - \varepsilon$.

Fie $y_0 = T(x_0)$. Atunci există $g \in E_1^*$, astfel încît

$$\| g \| = 1,\quad |g(y_0)| = \| y_0 \|.$$

De aici deducem

$$|\langle x_0, T^*(g)\rangle| = |\langle T(x_0), g\rangle| = |\langle y_0, g\rangle| =$$
$$= |g(y_0)| = \|y_0\| = \|T(x_0)\| > \|T\| - \varepsilon,$$

deci

$$\|T^*(g)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, T^*(g)\rangle| > \|T\| - \varepsilon.$$

Rezultă că

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|T^*(g)\| > \|T\| - \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\|T^*\| \geqslant \|T\|$$

și teorema este demonstrată.

Teorema 2. *Fie E, E_1 două spații vectoriale normate, E^*, E_1^*, conjugatele lor și T o operație liniară definită pe E și cu valori în E_1. Operația adjunctă operației T^*. pe care o notăm T^{**}, este extensiunea operației T la E^{**}, dacă facem abstracție de un izomorfism, astfel ca $E \subset E^{**}$.*

Demonstrație. Deoarece $T^{**} = (T^*)^*$, din teorema precedentă rezultă că T^{**} este o aplicație liniară continuă a spațiului E^{**} în $E_1{}^{**}$ și

$$\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|.$$

Fie acum

$$x \in E,\ x = X \in E^{**}$$

și

$$Y = T^{**}(X) \in E_1{}^{**}.$$

Avem

$$\langle g, Y\rangle = \langle g, T^{**}(X)\rangle = \langle T(g), X\rangle =$$
$$= \langle x, T(g)\rangle = \langle T(x), g\rangle,$$

pentru orice $g \in E_1{}^*$, ceea ce ne arată că Y este de forma

$$Y = y \in E_1$$

și

$$Y = T^{**}(X) = T(x).$$

Corolar. *Dacă spațiul E este reflexiv, atunci*

$$T^{**} = T.$$

§ 2. Ecuații normal rezolvabile

Operația adjunctă, în afară de faptul că oferă posibilitatea unui studiu paralel în spațiul E și spațiul conjugat, înlesnește studiul ecuațiilor liniare în spațiul E.

Definiția 1. *Fie E, E_1 două spații vectoriale normate, E^*, E_1^* conjugatele lor, T o aplicație liniară continuă a lui E în E_1 și T^* adjuncta operației T.*

Spunem că ecuația

$$y = T(x), \quad (x \in E,\ y \in E_1) \tag{1}$$

este normal rezolvabilă dacă din relația

$$T^*(g) = 0, \quad (g \in E_1^*)$$

implică

$$g(y) = 0$$

rezultă că ecuația (1) are o soluție $x \in E$.

Observația 1. Deoarece $T^*(g)$ este definit prin $\langle x, T^*(g)\rangle = \langle T(x), g\rangle$, pentru orice $x \in E$, implicația din definiție mai poate fi scrisă $\langle T(x), g\rangle = 0$, pentru orice $x \in E$ implică

$$\langle y, g\rangle = 0.$$

Această condiție este evident necesară pentru ca ecuația (1) să aibă soluția $x \in E$. Definiția 1, a rezolvabilității normale, cere ca ea să fie și suficientă.

Definiția 1 poate fi dată la fel și pentru operația T^*, făcînd însă să intervină spațiul E^{**} și operația T^{**}.

În atingerea scopului pe care-l urmărim, este necesar însă să intervină numai E și operația T.

De aceea vom da următoarea definiție, în care trebuie să ținem seamă că T^* nu are rolul unei operații liniare oarecare, ci al unei operații adjuncte.

Definiția 2. *În aceleași condiții ca în definiția* 1, *spunem că ecuația*

$$f = T^*(g) \quad (f \in E^*,\ g \in E_1^*) \tag{2}$$

este normal rezolvabilă, dacă din relația

$$T(x) = 0 \quad \textit{implică} \quad f(x) = 0$$

rezultă că ecuația (2) are o soluție $g \in E_1^*$.

Observația 2. Implicația definiției 2, care se mai scrie

$$T(x) = 0 \quad \text{implică} \quad \langle x, f\rangle = 0,$$

este necesară pentru ca ecuația (2) să aibă o soluție. Acest lucru se vede imediat din definiția lui T^* (observația 1).

Definiția 2 cere ca această implicație să fie și suficientă.

Vom căuta acum condițiile în care ecuația (1) (respectiv ecuația (2)) este normal rezolvabilă.

Presupunem că sîntem în condițiile definiției 1.

Condiția pentru rezolvabilitatea normală a ecuației (1) o vom deduce din

Teorema 1. *Închiderea în E_1 a mulțimii $T(E)$ este compusă din toate punctele $y \in E_1$ pentru care*

$$T^*(g) = 0 \quad \textit{implică} \quad g(y) = 0. \tag{3}$$

Demonstrație. Presupunem că $y_0 \in E_1$ se bucură de proprietatea:

$g(y_0) = 0$ *pentru orice* $g \in E_1^*$, *care verifică relația*

$$\langle x,\ T^*(g)\rangle = \langle T(x),\ g\rangle = 0 \quad \textit{pentru orice} \quad x \in E.$$

Dacă y_0 nu aparține mulțimii $T(E)$, există o funcțională $g_0 \in E_1^*$, astfel încît

$g_0(y_0) = 1$ și $g_0(y) = 0$, pentru orice $y \in \overline{T(E)}$ (vezi teorema 2, cap. III, § 5).

Fie $f_0 = T^*(g_0)$; avem atunci

$$\langle x,\ f_0\rangle = \langle x,\ T^*(g_0)\rangle = \langle T(x),\ g_0\rangle = 0 \quad \text{pentru orice } x \in E$$

de unde deducem că f_0 este identic nulă, deci $T^*(g_0) = 0$, sau $\langle x, T(g_0)\rangle = 0$, pentru orice $x \in E$. Însă această ultimă relație implică.

$$g_0(y_0) = 0,$$

ceea ce contrazice definiția funcționalei g_0.

Am arătat astfel că mulțimea E_1' a punctelor $y \in E_1$ pentru care este valabilă implicația (3) este inclusă în $\overline{T(E)}$.

Însă E_1' este intersecția mulțimilor de forma

$$^{-1}(0), \text{ unde } T^*(g) = 0,$$

deci este o mulțime închisă. Fie acum

$$y_1 \in T(E) \text{ și } T^*(g) = 0.$$

Atunci există $x_1 \in E$ astfel ca $y_1 = T(x_1)$ și

$$\langle y_1,\ g\rangle = \langle T(x_1),\ g\rangle = \langle x_1,\ T^*(g)\rangle = 0,$$

de unde $y_1 \in g^{-1}(0)$. Deducem

$$T(E) \subset E_1' \subset \overline{T(E)}$$

și, cum E_1' este închisă,

$$E_1' = \overline{T(E)}.$$

O consecință a teoremei 1 este

Teorema 2. *Pentru ca ecuația* (1) *să fie normal rezolvabilă este necesar și suficient ca* $T(E)$ *să fie o mulțime închisă în* E_1.

O condiție pentru rezolvabilitatea normală a ecuației (2) este dată de

Teorema 3. *Pentru ca ecuația* (2) *să fie normal rezolvabilă este necesar și suficient ca operația* T *să fie deschisă.*

Demonstrație. Presupunem că operația T este deschisă. Fie $f \in E^*$ astfel ca

$$T(x) = 0 \text{ implică } f(x) = 0.$$

Dacă $T(x_1) = T(x_2)$, atunci $f(x_1) = f(x_2)$.

Notăm, pentru $y \in T(x)$,

$$h(y) = f(x).$$

Funcționala h este liniară și continuă pe $T(E)$; există deci o funcțională g, liniară și continuă pe E_1, astfel că g coincide cu h pe $T(E)$. Avem

$$\langle x, T^*(g)\rangle = \langle T(x), g\rangle = \langle T(x), h\rangle = f(x), \text{ pentru orice } x \in E, \text{ deci}$$

$$f = T^*(g),$$

de unde rezultă că ecuația (2) este normal rezolvabilă.

Invers, presupunem că ecuația (2) este normal rezolvabilă. Fie $\{f_n\} \subset T^*(E_1^*)$ și

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0.$$

Dacă $T(x) = 0$, $f_n(x) = 0$, deci și $f(x) = 0$. Aceasta înseamnă că $f \in T^*(E_1^*)$, deci că $T^*(E_1^*)$ este închis în E^*. Deoarece E^* este un spațiu Banach, rezultă că $T^*(E_1^*)$ este un subspațiu Banach. Atunci, conform teoremei 12, capitolul II, paragraful 1, operația T^* este deschisă.

Ne mai rămîne să arătăm că, în aceste condiții, și operația T este deschisă.

Dacă presupunem că operația T nu este deschisă, există un șir $\{y_n\} \subset T(E)$ astfel că pentru orice x_n care verifică ecuația

$$T(x_n) = y_n, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

să avem

$$\| x_n \| > n \| y_n \|.$$

Putem presupune $\| y_n \| = 1$. Fie x_n' unul din punctele x_n pentru care este verificată ecuația (4), deci

$$T(x_n') = y_n.$$

Atunci distanța între x_n' și $T^{-1}(0)$ este $\geqslant n$. Datorită teoremelor de prelungire a funcționalelor liniare, există un șir $\{f_n\} \subset E^*$, astfel încît

$$f_n(x_n') = 1, \| f_n \| \leqslant \frac{1}{n}$$

și

$$f_n(u) = 0, \text{ pentru orice } u \in T^{-1}(0).$$

Din ultima relație rezultă că $f_n \in T^*(E_1^*)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, deoarece ecuația (2) este normal rezolvabilă. Deci există un șir de funcționale $\{g_n\} \subset E_1^*$, astfel încît

$$f_n = T^*(g_n) \text{ și } \| g_n \| \to 0.$$

Însă

$$| f_n(x_n') | = | \langle x_n', f_n\rangle | = | \langle x_n', T^*(g_n)\rangle | =$$

$$| \langle T(x_n'), g_n\rangle | = | \langle y_n, g_n\rangle | \leqslant \| g_n \|$$

și ajungem la o contradicție.

Teorema este astfel complet demonstrată.

§ 3. Condiții de izomorfism

În legătură cu problema cercetată în paragraful precedent, vom găsi condiții necesare și suficiente pentru ca operația T, sau operația T^* să fie izomorfisme algebrico-topologice.

1. În primul rînd, ținînd seama și de observațiile 1 și 2, paragraful 2, putem interpreta definițiile 1 și 2 din același paragraf într-o formă mai simplă. Presupunem că sîntem în aceleași condiții ca în paragraful 2.

Definiția 1. *Spunem că operația T este normală dacă din relația*

$$T^*(g) = 0 \quad \text{implică} \quad g(y) = 0$$

rezultă $y \in T(E)$.

Definiția 2. *Operația T^* este normală (în calitate de adjunctă a operației T) dacă din relația*

$$Tx(x) = 0 \quad \text{implică} \quad f(x) = 0$$

rezultă $f \in T^*(E_1^*)$.

Din teorema 3, paragraful 2, rezultă imediat

Teorema 1. *Dacă operația T este deschisă, atunci și operația T^* este deschisă.*

Demonstrație. Teorema 3, din paragraful 2 ne arată că dacă operația T este deschisă, atunci T^* este normală.

De altă parte, în demonstrația aceleiași teoreme am arătat că dacă T^* este normală, atunci ea este o operație deschisă.

Reciproca teoremei 1 nu este, în general, adevărată, însă din teorema care urmează constatăm că ea este valabilă într-un caz foarte important.

Teorema 2. *Fie B un spațiu Banach, E_1 un spațiu vectorial normat, T o aplicație liniară continuă a lui B în E_1 și T^* operația adjunctă operației T. Dacă T^* este o operație deschisă, atunci și T este deschisă.*

Demonstrație. Fie S sfera unitate a spațiului B.

Dacă operația T nu este deschisă, mulțimea $T(S)$ este rară în E_1 (vezi teorema 9, cap. II, § 1).

Atunci, potrivit teoremei 7 din capitolul II, paragraful 1, există un șir de funcționale $\{h_n\}$ liniare și continue definite pe $T(B)$, astfel încît

$$\|h_n\| = 1, \quad \sup_{y \in T(S)} |h_n(y)| < \frac{1}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fie $\{g_n\}$ un șir de funcționale obținute prin prelungirea pe întreg spațiul E_1 a funcționalelor h_n, fără majorarea normei.

Notăm

$$f_n = T^*(g_n).$$

Atunci $\|x\| \leqslant 1$, $x \in B$ implică

$$|f_n(x)| = |g_n(T(x))| < \frac{1}{n},$$

de unde $\|f_n\| \to 0$, cînd $n \to \infty$.

Presupunem acum că T^* este deschisă. Atunci există un șir de funcționale $\{g_n'\}$, astfel încît

$$T^*(g_n') = f_n = T^*(g_n) \text{ și } g_n' \to 0.$$

Pentru $x \in B$,

$$g_n(T(x)) = f_n(x) = g_n'(T(x))$$

și $y \in B$ implică

$$g_n'(y) = g_n(y) = h_n(y),$$

deci

$$\|g_n'\| \geqslant \|h_n\| = 1$$

și am ajuns la o contradicție.

Dacă ținem seama și de teorema 1, putem enunța

T e o r e m a 3. *În condițiile teoremei 2, pentru ca operația T să fie deschisă este necesar și suficient ca T^* să fie deschisă.*

2. Revenim iar la cazul general a două spații vectoriale normate oarecare E și E_1.

T e o r e m a 4. *Operația T este un izomorfism algebrico-topologic dacă și numai dacă $T^*(E_1^*) = E^*$.*

D e m o n s t r a ț i e. *a*) Presupunem că T este un izomorfism și fie $f \in E^*$. Pentru orice $y \in T(E)$ notăm $h(y) = f(T^{-1}(y))$. Atunci există o funcțională $g \in E_1^*$ care coincide cu h pe $T(E)$.

Pentru orice $x \in E$, avem

$$\langle x, T^*(g)\rangle = \langle T(x), g\rangle = \langle T(x), h\rangle =$$
$$= \langle T^{-1}T(x), f\rangle = \langle x, f\rangle$$

deci

$$T^*(g) = f.$$

De aici rezultă

$$T^*(E_1^*) = E^*.$$

b) Presupunem că T nu este biunivocă. Există atunci $x_0 \neq 0$, $x_0 \in E$ cu $T(x_0) = 0$.

Pentru orice $f \in E^*$ de forma

$$f = T^*(g) \text{ cu } g \in E_1^*$$

avem

$$f(x_0) = \langle x_0, f\rangle = \langle T(x_0), g\rangle = 0.$$

Însă, potrivit teoremei 1 din capitolul III, paragraful 5, există cel puțin o funcțională $f_0 \in E^*$, astfel încît

$$f_0(x_0) \neq 0$$

deci

$$E^* \neq T^*(E_1^*).$$

c) Presupunem că T este biunivocă, însă nu este bicontinuă. Atunci există un șir $\{x_n\} \subset E$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$$

și

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0.$$

De aici, pentru orice $g \in E_1^*$, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, T^*(g)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n), g\rangle = 0$$

deci, pentru orice $f \in T^*(E_1^*)$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

Rezultă, potrivit teoremei 3 din capitolul IV, paragraful 2, că

$$\sup_n \|x_n\| < \infty,$$

ceea ce contrazice definiția șirului $\{x_n\}$.

Teorema este astfel demonstrată.

T e o r e m a 5. *Operația T^* este biunivocă dacă și numai dacă $T(E)$ este densă în E_1.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\overline{T(E)} \neq E_1$. Atunci există $g \in E_1^*$, $g \neq 0$, astfel încît

$$g(y) = 0, \text{ pentru orice } y \in T(E),$$

de unde rezultă $T^*(g) = 0$.

Invers, dacă $\overline{T(E)} = E_1$ și $T^*(g) = 0$, atunci pentru orice $x \in E$,

$$\langle T(x), g\rangle = \langle x, T^*(g)\rangle = 0,$$

de unde rezultă $g = 0$.

T e o r e m a 6. *Dacă mulțimea $T^*(E_1^*)$ este densă în E^*, atunci operația T este biunivocă.*

D e m o n s t r a ț i e. Presupunem că T nu este biunivocă, deci că există $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ cu $T(x_0) = 0$.

Există o funcțională $f_0 \in E^*$ astfel încît $f_0(x_0) = 1$.

Atunci pentru orice $f \in E^*$ cu

$$\|f - f_0\| < \frac{1}{2\|x_0\|}$$

avem

$$|f(x_0) - f_0(x_0)| < \frac{1}{2}$$

ceea ce implică $f(x_0) \neq 0$, deci f nu aparține mulțimii $T^*(E_1^*)$. Aceasta înseamnă că f_0 nu aparține mulțimii $\overline{T^*(E_1^*)}$, deci $T^*(E_1^*)$ nu este densă în E^*.

T e o r e m a 7. *Dacă mulțimea $T(E)$ este neslabă în E_1, atunci operația T^* este un izomorfism.*

D e m o n s t r a ț i e. Deoarece $T(E)$ este o mulțime închisă în E_1, deci o mulțime cu proprietatea lui Baire și de a doua categorie, coincide cu E_1.

Din teorema 5 rezultă că T^* este biunivocă.

Fie acum $\{g_n\} \subset E_1^*$,

$$f_n = T^*(g_n), \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

și

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Atunci există un șir de numere, $\{\lambda_n\} \subset K$, astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f_n = 0.$$

Pentru orice $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n f_n(x) = 0,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n g_n (T(x)) = 0$$

deci, pentru orice $y \in T(E)$,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n g_n(y) = 0.$$

Atunci

$$\sup_n \|\lambda_n g_n\| < \infty,$$

de unde deducem

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0.$$

Am arătat astfel că operația $(T^*)^{-1}$ este continuă, deci T^* este un izomorfism algebrico-topologic.

3. Dacă impunem condiția ca E să fie un spațiu Banach obținem

T e o r e m a 8. *Fie B un spațiu Banach, E_1 un spațiu vectorial normat și T o aplicație liniară continuă a lui B în E_1. Dacă T^* este un izomorfism, atunci $T(B) = E_1$.*

D e m o n s t r a ț i e. Din teorema 2, capitolul II, paragraful 3 și teorema 3, rezultă că T este deschisă.

Atunci spațiul $T(B)$ este complet, deci închis în E_1. Însă din teorema 5 rezultă că

$$\overline{T(B)} = E_1, \text{ deci } T(B) = E_1.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă în loc de B luăm un spațiu E necomplet, teorema 8 nu este valabilă.

De exemplu, fie E un subspațiu vectorial al lui E_1, $E \neq E_1$, $\overline{E} = E_1$ și T operația identitate din E_1.

4. Cerînd mai mult, anume ca și E_1 să fie un spațiu Banach, putem enunța

T e o r e m a 9. *Fie B și B_1 două spații Banach, B^* și B_1^* conjugatele lor, T o aplicație liniară continuă a lui B în B_1 și T^* operația adjunctă. Următoarele propoziții sînt echivalente:*

(*a*) *T este o operație normală*

(*b*) *T^* este o operație normală* (ca operație adjunctă)

(*c*) *T este o operație deschisă*

(*d*) *T^* este o operație deschisă*

(*e*) *Mulțimea $T(B)$ este închisă în B_1.*

Demonstrație. Echivalența între (*a*) și (*e*) ne-o dă teorema 2, din paragraful 2. Echivalența între (b) și (*c*) este teorema 3, din paragraful 2. Echivalența între (*c*) și (*d*) este teorema 3, iar echivalența între (*a*) și (*e*) rezultă din teorema 11 din capitolul II, paragraful 1.

Astfel am demonstrat următoarea schemă de echivalențe, din care rezultă că toate propozițiile sînt echivalente :

$$\begin{array}{ccccc} & & (b) & & \\ & & \updownarrow & & \\ (a) & \leftrightarrow & (e) & \leftrightarrow & (c) \\ & & \updownarrow & & \\ & & (d) & & \end{array}$$

Teorema 10. *În aceleași condiții ca în teorema 9, sînt valabile următoarele propoziții :*

a) T este un izomorfism dacă și numai dacă $T^*(B_1^*) = B^*$

b) T^* este un izomorfism dacă și numai dacă $T(B) = B_1$.

Demonstrație. Rezultă din teoremele 4,8 și 7 de mai sus.

5. Din teoremele demonstrate în acest paragraf putem deduce și următoarele rezultate relative la cazul unui operator al unui spațiu vectorial normat în el însuși.

Teorema 11. *Fie E un spațiu vectorial normat, E^* conjugatul său, T un operator liniar continuu în E și T^* operatorul adjunct al lui T. Atunci spațiul $(T^*)^{-1}(0)$ este izomorf algebric și topologic cu spațiul conjugat spațiului $E/\overline{T(E)}$.*

Dacă operatorul T este și deschis, atunci spațiul $E^*/T^*(E^*)$ este izomorf algebric și topologic cu spațiul conjugat spațiului $T^{-1}(0)$.

Demonstrație. *a*) Fie V aplicația liniară canonică a spațiului E pe $E' = E/\overline{T(E)}$.

Operația adjunctă V^* este un izomorfism, pentru că V este deschisă și $V(E) = E'$ (vezi teorema 1 și 5). V^* este atunci normală, deci mulțimea $V^*(E'^*)$ este formată din toate funcționalele $f \in E^*$ pentru care

$$f(\overline{T(E)}) = \{0\},$$

deci din toate funcționalele $f \in E^*$ pentru care $x \in E$ implică $f(T(x)) = 0$, adică exact acelea pentru care $T^*(E) = 0$.

Prima parte a teoremei este astfel demonstrată.

b) Fie acum U aplicația identică a mulțimii $E'' = T^{-1}(0)$ în E. Atunci (teorema 4)

$$U^*(E^*) = E''^*.$$

U^* este deschisă (teorema 14, cap. II, § 1), deci E''^* este izomorf cu $E/U^{*-1}(0)$

Ne rămîne atunci de demonstrat că

$$U^{*-1}(0) = T^*(E^*).$$

Aceasta rezultă din faptul că T^* este normală și atunci $U^{*-1}(0)$ este mulțimea tuturor $f \in E^*$ pentru care

$$f(E'') = \{0\}.$$

§ 4. Operatorul conjugat unui operator pozitiv

În acest paragraf vom presupune că B este spațiu Banach parțial ordonat pentru care $\operatorname{int} B_+ \neq 0$.

Considerăm operatori T definiți în B și cu valori tot în B. Atunci operatorul T^* (operatorul conjugat sau adjunct) este definit în B^* și ia valori tot în B^*.

Definiție. *Spunem că operatorul T este pozitiv dacă relația*

$$x \leqslant y$$

implică

$$T(x) \leqslant T(y)$$

sau, ceea ce este același lucru, dacă

$$T(B_+) \subset B_+.$$

Observăm că relația

$$T(B_+) \subset B_+$$

implică relația

$$T(\overline{B}_+) \subset \overline{B}_+$$

însă nu și invers.

Propoziția 1. *Dacă T este un operator pozitiv atunci și T^* este pozitiv.*

Demonstrație. Dacă $T(B_+) \subset B_+$ și $f \in B_+^*$, atunci $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in B_+$, deci

$$(T^* f)(x) = f(T(x)) \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \in B_+,$$

de unde rezultă că $T^*(f) \in B_+^*$, adică

$$T^*(B_+^*) \subset B_+^*.$$

Propoziția 2. *Dacă T^* este pozitiv și $B_+ = \overline{B}_+$, atunci și T este pozitiv.*

Demonstrație. Să presupunem că există $x_0 \in B_+$ pentru care $T(x_0)$ nu aparține lui B_+.

Atunci există o funcțională $f_0 \in B_+^*$, astfel că

$$f_0(T(x_0)) < 0$$

adică

$$T^*(f_0)(x_0) < 0.$$

Însă acest lucru este imposibil, pentru că

$$T^* f_0 \in B_+^* \text{ și } x_0 \in B_+$$

Propoziția 3. *Dacă T este un operator pozitiv și există un element $x_0 \in B$ pentru care $T(x_0) \gg 0$ atunci $T(x) \gg 0$ pentru orice $x \gg 0$.*

Demonstrație. Fie, într-adevăr, $T(x_0) \gg 0$ și $x \in \operatorname{int} B_+$. Există numărul real $r > 0$, astfel încît

$$S(x; r) \subset B_+.$$

Deoarece

$$\| x - a x_0 - x \| = | a | \, \| x_0 \| ,$$

pentru

$$0 < a < \frac{r}{\| x_0 \|}, \text{ avem}$$

$$x - a x_0 \in S (x ; r),$$

deci

$$x - a x_0 \geqslant 0.$$

Atunci

$$T (x - a x_0) = T (x) - a \; T (x_0) \geqslant 0,$$

deci

$$T (x) \geqslant a \, T (x_0) \geqslant 0,$$

de unde rezultă

$$T (x) \geqslant 0.$$

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Operația adjunctă a fost studiată de F. Riesz în cazuri particulare, apoi de S. Banach, J. Schauder, F. Hausdorff etc.

J. Schauder a studiat sistematic ecuațiile liniare cu ajutorul operației adjuncte.

2. Ecuațiile normal rezolvabile au fost studiate de F. Hausdorff [132].

Expunerea redată în cartea noastră cu rezultate noi, se datorește lui M. Katetov [156].

3. Operatorul conjugat unui operator pozitiv este studiat de M. G. Krein și M. A. Rutman în [187].

CAPITOLUL VI

CALCULUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL ÎN SPAȚII BANACH

După modelul analizei clasice, s-a dezvoltat și pentru spațiile Banach și în general pentru spațiile vectoriale topologice, un calcul diferențial și integral, impus de multe ori de aplicații.

Un rol important în definirea noțiunilor, analoge cu cele din analiza clasică și stabilirea proprietăților lor, îl joacă funcționalele liniare continue, care permit să se reducă studiul anumitor noțiuni referitoare la spațiile Banach, la noțiunile corespunzătoare din domeniul real sau complex.

Dezvoltarea noțiunilor studiate în acest capitol se datorește în mare parte matematicienilor sovietici L. A. Liusternik, I. M. Ghelfand, V. I. Sobolev, M. Govurin etc.

§ 1. Funcții de variabilă reală cu valori într-un spațiu vectorial normat

1. Considerăm funcții definite pe axa reală sau pe o parte a ei și cu valori într-un spațiu vectorial normat E. Variabila reală o vom nota în general cu t. Pentru astfel de funcții, se definește derivata la fel ca pentru funcțiile cu valori reale.

Definiția 1. *Fie $x = x(t)$ o funcție de variabilă reală cu valori în spațiul vectorial normat E. Numim derivata funcției x în punctul $t \in R$, elementul (aparținînd spațiului E)*

$$x'(t) = \lim_{t' \to t} \frac{1}{t' - t} (x(t') - x(t)) \tag{1}$$

(dacă există).

Propoziția 1. *Dacă funcția $x = x(t)$ este derivabilă în punctul t, ea este continuă în acest punct.*

Demonstrație. Notăm, pentru simplificare, $t' - t = \Delta t$.

Atunci

$$x'(t) = \frac{1}{\Delta t} (x(t + \Delta t) - x(t)) + \alpha(t, \Delta t),$$

unde

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha(t, \Delta t) = 0.$$

De aici

$$x(t') - x(t) = x'(t) \cdot \Delta t + \alpha(t, \Delta t) \cdot \Delta t,$$

deci cînd $\Delta t \to 0$, $x(t') \to x(t)$.

2. Următoarele propoziții sînt imediate.

P r o p o z i ț i a 2. *Dacă există $x'(t)$ și $y'(t)$, atunci* $[x(t) + y(t)]' = x'(t) + y'(t)$.

P r o p o z i ț i a 3. *Dacă există $x'(t)$ și $y'(t)$, atunci* $[ax(t)]' = ax'(t)$ *(a real).*

Propoziția 3 este un caz particular al regulei de derivare a operațiilor biliniare continue, dată de

P r o p o z i ț i a 4. *Fie trei spații vectoriale normate E_1, E_2, F și $U(x, y)$ o operație biliniară continuă definită pe $E_1 \times E_2$ și cu valori în F. Dacă x și y sînt funcții de o variabilă reală*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

derivabile în punctul t, atunci $U(t) = U(x(t), y(t))$ este o funcție (cu valori în F) derivabilă în punctul t și

$$U'(t) = U(x'(t), y(t)) + U(x(t), y'(t)). \tag{2}$$

D e m o n s t r a ț i e. Din definiția operațiilor biliniare (cap. II, § 7), rezultă

$$\frac{1}{t'-t}(U(t') - U(t)) = \frac{1}{t'-t}[U(x(t'), y(t')) - U(x(t), y(t))] =$$

$$= \frac{1}{t'-t}[U(x(t')\, y(t)) - U(x(t), y(t))] + \frac{1}{t'-t}[U(x(t'), y(t')) -$$

$$- U(x(t'), y(t))] = \frac{1}{t'-t} U(x(t') - x(t), y(t)) + \frac{1}{t'-t} U(x(t'), y(t') - y(t)) =$$

$$= U\left[\frac{1}{t'-t}(x(t') - x(t), y(t))\right] + U\left[x(t'), \frac{1}{t'-t}(y(t') - y(t))\right]$$

de unde, trecînd la limită,

$$\lim_{t' \to t} \frac{1}{t'-t}[U(t') - U(t)] = \lim_{t' \to t} U\left[\frac{1}{t'-t}(x(t') - x(t)), y(t)\right] +$$

$$+ \lim_{t' \to t} U\left[[x(t'), \frac{1}{t'-t}(y(t') - y(t))\right] = U\left[\lim_{t' \to t} \frac{1}{t'-t}(x(t') -\right.$$

$$\left. - x(t)), y(t)\right] + U\left[\lim_{t' \to t} x(t'), \lim_{t' \to t} \frac{1}{t'-t}(y(t') - y(t))\right] =$$

$$= U(x'(t), y(t)) + U(x(t), y'(t)).$$

3. În particular, produsul elementelor dintr-o algebră vectorială normată B este o operație biliniară definită pe $B \times B$ și cu valori în B, deci putem aplica propoziția 4 :

$$[x(t)\,y(t)]' = x'(t)\,y(t) + x(t)\,y'(t).$$

Un alt caz particular se obține dacă se consideră spațiul vectorial normat E și spațiul $\mathfrak{L}(E, F)$ al operatorilor liniari și continui definiți pe E și cu valori în spațiul Banach F. Operația

$$(x,\ T) \to T(x)$$

este o operație biliniară continuă definită pe $E \times \mathfrak{L}(E, F)$ și cu valori în F. Dacă T și x sînt funcții derivabile de t, atunci

$$[T_t(x(t))]' = T'_t(x(t)) + T_t(x'(t)).$$

Dacă unul dintre factori este constant în raport cu t, derivata lui este nulă și relațiile precedente se reduc la

$$[x(t)\,y]' = x'(t)\,y \quad \text{sau} \quad [xy(t)]' = xy'(t)$$

și

$$[T_t(x)]' = T'_t(x) \quad \text{sau} \quad [T(x(t)]' = T(x'(t)).$$

4. Derivatele de ordin superior se definesc succesiv prin relația

$$x^{(n)}(t) = [x^{(n-1)}(t)]' = \frac{d}{dt}[x^{(n-1)}(t)]$$

presupunînd că $x^{(n-1)}(t)$ din această relație există în vecinătatea lui t și este derivabil în punctul t.

Pentru derivata de ordinul n a unei operații biliniare continue se poate demonstra, la fel ca în cazul funcțiilor cu valori reale, *formula lui Leibnitz :*

$$U^{(n)}(x,\ y) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, U(x^{(n-i)},\ y^{(i)}).$$

5. Considerațiile alineatelor precedente se extind, în mod evident, la funcții de mai multe variabile reale cu valori într-un spațiu vectorial normat.

Derivatele parțiale de primul ordin se definesc conform definiției 1, iar cele de ordin superior se definesc succesiv. Se poate demonstra, în condițiile obișnuite, că derivatele mixte de ordin superior nu depind de ordinea în care sînt luate variabilele.

6. Cu ajutorul derivatelor parțiale putem preciza relația între operațiile multiliniare simetrice și polinoamele omogene (vezi cap. II, § 7).

P r o p o z i ț i a 5. *Fie $P_n(x)$ un polinom definit pe spațiul vectorial normat E și cu valori în spațiul vectorial normat F. Atunci*

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\,\partial t_2 \dots \partial t_n} P_n(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) = n!\,U(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n),$$

unde U este operația multiliniară simetrică de definiție a polinomului P_n.

Demonstrație. Am văzut (propoziția 4, cap. II, § 7) că

$$P_n(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_n x_n) =$$

$$= \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}\, t_1^{n_1}\ldots t_k^{n_k}\, U(y_1, \ldots, y_n),$$

unde $U(y_1, \ldots, y_n)$ nu depinde de scalarii $t_1, \ldots, t_n$. Atunci operatorul

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n}$$

anulează toți termenii acestei sume, cu excepția acelora care au în factor toți scalarii $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Există un singur termen de acest fel, anume acela pentru care $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 1$, deci

$$n!\, t_1 t_2 \ldots t_n\, U(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Acest termen este transformat în $n!\, U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deci relația din teoremă este dovedită.

Propoziția 6. *Fie P_n și Q_n două polinoame definite pe E și U, V operațiile multiliniare care le definesc. Dacă*

$$P_n(x) = Q_n(x), \text{ pentru orice } x \in E,$$

atunci

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$.

Demonstrație. Avem

$$P_n(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) = Q_n(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n),$$

deci

$$\frac{\partial^n}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n} P_n(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial t_1\, \partial t_2 \ldots \partial t_n} Q_n(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n),$$

adică

$$n!\, U(x_1, x_2, \cdots, x_n) = n!\, V(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

Această propoziție ne arată că există o corespondență biunivocă între operațiile multiliniare simetrice și polinoamele omogene.

Noi am definit polinomul omogen, plecînd de la operația multiliniară simetrică. Vom vedea acum că și invers, cunoscînd polinomul omogen, se poate defini operația multiliniară simetrică respectivă. Dăm mai întîi următoarea definiție :

Fie $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ o funcție de n variabile reale cu valori în spațiul vectorial normat E. Considerăm numerele $t_0, t_1, \ldots, t_n$ drept coordonate în spațiul euclidian R_n.

Dacă notăm baza algebrică a spațiului R_n (față de care sînt luate aceste coordonate) prin $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, punctul $T(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R_n$ este echivalent cu vectorul

$$T = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \cdots + t_n e_n.$$

Definiția 2. *Numim diferență de ordinul n a funcției f în punctul $T_0(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_n^0)$ expresia*

$$\overline{\Delta}^n_{t_1, t_2, \ldots, t_n} f(T_0) =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} (-1)^{n-k} f(T_0 + \Delta t (e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k})),$$

unde suma este luată pe toate submulțimile $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ și

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n.$$

Propoziția 7. *Fie $P_n(x)$ un polinom omogen de grad n. Operația multiliniară simetrică de definiție a acestui polinom este*

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \overline{\Delta}^n_{x_1 x_2 \ldots x_n} P_n(0).$$

Demonstrație. Se vede ușor că diferența din dreapta egalității precedente este o operație multiliniară simetrică și că pentru $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ coincide cu $P_n(x)$.

Definiția 3. *Operația multiliniară simetrică de definiție a unui polinom omogen se mai numește și forma polară a polinomului.*

§ 2. Integrala Riemann-Stieltjes

1. Considerăm funcții definite pe segmentul $[0,1]$ și cu valori într-un spațiu Banach B.

Dacă $x(t)$ este o astfel de funcție, continuă pe segmentul $[a, b]$ și $\varphi(t)$ este o funcție cu variația mărginită, definită pe segmentul $[a, b]$ și cu valori în corpul scalarilor K, se poate defini integrala

$$\int_a^b x(t)\, d\varphi(t)$$

la fel ca pentru funcțiile reale sau complexe.

Înainte de a da definiția acestei integrale, să reamintim definiția unei funcții cu variația mărginită.

Definiția 1. *Numim diviziune a segmentului $[a, b]$ o mulțime finită de puncte*

$$\delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\} \subset [a, b],$$

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b.$$

Mulțimea tuturor diviziunilor δ o notăm Δ.

Funcția φ definită pe $[a, b]$ și cu valori în K este cu variația mărginită dacă

$$\sup_{\delta \in \Delta} \sum_{i=1}^{n} | \varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1}) | < +\infty.$$

De asemenea mai avem nevoie de:

P r o p o z i ț i a 1. *Orice funcție continuă $x(t)$ definită pe segmentul $[a, b]$ și cu valori în spațiul Banach B este uniform continuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$,* astfel încît

$$| t' - t'' | < \eta \; ; \quad t', t'' \in [a, b],$$

implică

$$\| x(t') - x(t'') \| < \varepsilon.$$

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm funcția reală $\alpha(t, t')$ definită pe patratul $a \leqslant t \leqslant b$, $a \leqslant t' \leqslant b$, prin egalitatea

$$\alpha(t, t') = \| x(t) - x(t') \|.$$

Această funcție este continuă pe patratul de definiție, deci și uniform continuă. Atunci, $\varepsilon > 0$ fiind dat, există $\eta(\varepsilon)$ astfel ca

$$| t - t' | < \eta ; \quad t, t' \in (a, b),$$

implică

$$| \alpha(t', t'') - \alpha(t, t'') | < \varepsilon,$$

oricare ar fi $t'' \in [a, b]$. În particular,

$$| \alpha(t', t) - \alpha(t, t) | < \varepsilon.$$

Însă

$$\alpha(t, t) = \| x(t) - x(t) \| = 0,$$

deci

$$\| x(t) - x(t') \| = | \alpha(t, t') | < \varepsilon$$

și propoziția este demonstrată.

2. Trecem acum la definiția integralei.

T e o r e m ă. *Fie $x(t)$ o funcție continuă, definită pe segmentul $[a, b]$ și cu valori în spațiul Banach B și $\varphi(t)$ o funcție cu variația mărginită, definită pe $[a, b]$ și cu valori în corpul scalarilor K. Atunci există un element $\mathcal{J} \in B$, cu următoarea proprietate:*

pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$, astfel încît

$$\| \mathcal{J} - \sum_{i=1} x(t_i) [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})] \| < \varepsilon,$$

oricare ar fi diviziunea $\delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\} \in \Delta$ supusă la condiția

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | \tau_i - \tau_{i-1} | < \eta$$

și oricare ar fi punctul $t_i \in [\tau_i, \tau_{i-1}]$.

D e m o n s t r a ț i e. Vom întrebuința notațiile

$$N(\delta) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | \tau_i - \tau_{i-1} | \; ;$$

pentru $\delta = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$,

$$S(\delta) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\,[\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})]$$

și

$$M = \sup_{\delta \in \Delta} \| S(\delta) \| .$$

a) Pentru $\varepsilon > 0$ dat, există $\mu(\varepsilon)$ astfel încît $\max\{N(\delta'), N(\delta'')\} \leqslant \mu(\varepsilon)$ implică

$$\| \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\,[\varphi(\tau_i') - \varphi(\tau_{i-1}') - \sum_{i=1}^{m} x(s_i)\,[\varphi(\tau_i'') - \varphi(\tau_{i-1}'')] \| < \varepsilon,$$

unde $\delta' = \{\tau_0', \tau_1', \ldots, \tau_n'\}$, $\delta'' = \{\tau_0'', \tau_1'', \ldots, \tau_m''\}$.

Într-adevăr, este suficient să luăm $\mu(\varepsilon)$, astfel încît

$$| t - t' | \leqslant 4\mu(\varepsilon)$$

să implice

$$\| x(t) - x(t') \| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pentru a dovedi aceasta, considerăm diviziunea $= \delta' \cup \delta''$ formată cu toate punctele mulțimii

$$\{\tau_0', \tau_1', \ldots, \tau_n'\} \cup \{\tau_0'', \tau_1'', \ldots, \tau_m''\}$$

și puncte

$$t_i \in [\tau_i', \tau_{i-1}'], \quad s_i \in [\tau_i'', \tau_{i-1}''].$$

Avem

$$\| \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\,[\varphi(\tau_i') - \varphi(\tau_{i-1}') - \sum_{i=1}^{m} x(s_i)\,[\varphi(\tau_i'') - \varphi(\tau_{i-1}'')] \| =$$

$$= \| \sum_{i=1}^{n} x(t_i) \sum_{[\sigma_j, \sigma_{j-1}] \subset [\tau_i', \tau_{i-1}']} [\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})] -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} x(s_i) \sum_{[\sigma_j, \sigma_{j-1}] \subset [\tau_i'', \tau_{i-1}'']} [\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})] \| =$$

$$= \| \sum_{j=1}^{l} x(t_j)\,[\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{l} x(s_j)\,[\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})] \|,$$

unde am notat

$$\delta = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_l\}, \quad l = m + n$$

și

$$t_j = t_i \quad \text{pentru} \quad [\sigma_j, \sigma_{j-1}] \subset [\tau_i', \tau_{i-1}']$$

$$s_j = s_k \quad \text{pentru} \quad [\sigma_j, \sigma_{j-1}] \subset [\tau_k'', \tau_{k-1}''].$$

Să observăm că

$$t_j - s_j = t_i - \tau_j' + \tau_i - \sigma_j + \sigma_k - \tau_k + \tau_k'' - s_k,$$

deci

$$| t_j - s_j | \leqslant 4\mu.$$

Atunci

$$\| \sum_{j=1}^{l} [x(t_j) - x(s_j)] \, [\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})] \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l} \| x(t_j) - x(s_j) \| \cdot | \varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1}) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{M} \sum_{j=1}^{l} | \varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1}) | \leqslant \varepsilon$$

şi afirmaţia noastră este dovedită.

b) Considerăm acum un şir de diviziuni

$$\{ \delta_p \}_{1 \leqslant p < \infty}, \quad \text{unde} \quad \delta_p = \{ \tau_0^{(p)}, \tau_1^{(p)}, \ldots, \tau_{n(p)}^{(p)} \}$$

şi

$$\lim_{p \to \infty} N(\delta_p) = 0.$$

Dacă notăm

$$S_p = \sum_{i=1}^{n(p)} x(t_i^{(p)}) [\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})],$$

unde

$$t_i^{(p)} \in [\tau_i^{(p)}, \tau_{i-1}^{(p)}], \ (i = 1, \ldots, n(p)),$$

există $p_0(\mu)$, astfel că p', $p'' \geqslant p_0$ implică

$$\| S_{p'} - S_{p''} \| < \varepsilon.$$

Urmează de aici că şirul (inclus în B),

$$\{ S_0, S_1, \ldots, S_p, \ldots \}$$

este un şir Cauchy, deci tinde către un element $\mathcal{J} \in B$, cînd $p \to \infty$.

c) Elementul

$$\mathcal{J} = \lim_{p \to \infty} S_p$$

satisface condiţiile teoremei.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\mu(\varepsilon/2)$ determinat ca la punctul *a*). Dacă luăm diviziunea

$$\delta = \{ \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n \}$$

cu $N(\delta) \leqslant \mu(\varepsilon/2)$ şi numărul p astfel încît

$$N(\delta_p) \leqslant \mu(\varepsilon/2),$$

de unde deducem

$$\| S_p - \mathcal{J} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

avem

$$\| \mathcal{J} - \sum_{i=1}^{n} x(t_i) [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})] \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathcal{J} - S_p \| + \| S_p - \sum_{i=1}^{n} x(t_i) [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})] \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci

$$\| \mathcal{J} - \sum_{i=1}^{n} x(t_i) [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})] \| \leqslant \varepsilon$$

dacă $N(\delta) \leqslant \eta(\varepsilon)$, unde $\eta(\varepsilon) = \mu(\varepsilon/2)$.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Observație. Este evident că elementul $\mathcal{J}$ este unic determinat.

Definiția 2. *Elementul $\mathcal{J}$ dat de teorema 1 se numește integrala Riemann-Stieltjes a funcției x în raport cu φ pe segmentul $[a, b]$ și se notează*

$$\mathcal{J} = \int_a^b x(t)\, d\varphi(t).$$

Se mai întrebuințează și notațiile

$$\mathcal{J} = \int_{[a,b]} x(t)\, d\varphi(t) = \int_{[a,b]} x\, d\varphi = \int_a^b x\, d\varphi.$$

Următoarea propoziție a fost demonstrată în cursul teoremei 1, însă o prezentăm și separat din cauza importanței sale.

Propoziția 2. *Considerăm un șir oarecare de diviziuni $\{\delta_p\} \subset \Delta$, astfel încît*

$$\lim_{n \to \infty} N(\delta_p) = 0.$$

Atunci

$$\mathcal{J} = \lim_{p \to \infty} \sum x(t_i) [\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})].$$

3. Proprietățile integralei Riemann-Stieltjes.

Propoziția 3. *Dacă T este o aplicație liniară continuă a spațiului Banach B în spațiul Banach B', atunci*

$$\int_{[a,b]} T(x)\, d\varphi = T\left(\int_{[a,b]} x\, d\varphi \right).$$

Demonstrație. Mai întîi, $T(x)(t)$ este o funcție continuă definită pe $[a, b]$ și cu valori în B' prin egalitatea

$$T(x)(t) = T(x(t)),$$

deci integrala din stînga există. După propoziţia 2,

$$\int_{[a,b]} T(x)\,d\varphi = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n(p)} T\left(x(t_i^{(p)})\right)\left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})\right] =$$

$$= \lim_{p\to\infty} T\Big(\sum_{i=1}^{n(p)} x(t_i^{(p)})\left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})\right]\Big) =$$

$$= T\Big(\lim_{p\to\infty} \sum x(t_i^{(p)})\left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})\right]\Big) =$$

$$= T\Big(\int_{[ab]} x\,d\varphi\Big)$$

P r o p o z i ţ i a 4. *Dacă $f \in B^*$ (f este funcţională liniară continuă definită pe B), atunci*

$$\Big\langle \int_{[a,b]} x\,d\varphi,\ f \Big\rangle = \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\,d\varphi.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Rezultă din propoziţia 3, luînd ca spaţiu B' corpul K al scalarilor şi ca operaţie T funcţionala f. Am notat

$$\langle x,\ f\rangle = f(x).$$

P r o p o z i ţ i a 5. *Dacă notăm*

$$V(\varphi) = \sup_{\delta\in\Delta} \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi(\tau_i) - \varphi(\tau_{i-1})\right]$$

şi

$$M(x;\ [a,\ b]) = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} \| x(t) \|,$$

avem

$$\Big\| \int_{[a,b]} x\,d\varphi \Big\| \leqslant M(x;\ [a,\ b])\cdot V(\varphi).$$

D e m o n s t r a ţ i e. Ţinînd seamă de propoziţia (2)

$$\Big\| \int_{a,b} x\,d\varphi \Big\| = \Big\| \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n(p)} x(t_i^{(p)}) \left[\ \varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})\right] \Big\| =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n(p)} x(t_i^{(p)}) \left[\ \varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)})\ \right] \Big\| \leqslant M(x;\ [a,\ b])\cdot V(\varphi).$$

P r o p o z i ţ i a 6. *Dacă $x(t)$ şi $y(t)$ sînt funcţii continue definite pe $[a,\ b]$ şi cu valori în spaţiul B şi α, β scalari ($\in K$) atunci,*

$$\int_{[a,b]} (\alpha x + \beta y)\,d\varphi = \alpha \int_{[a,b]} x\,d\varphi + \beta \int_{[a,b]} y\,d\varphi.$$

Demonstrație. Este suficient să observăm că

$$\left\langle \int_{[a,b]} (\alpha x + \beta y)\, d\varphi,\ f \right\rangle = \int_{[a,b]} \langle \alpha x + \beta y,\ f\rangle\, d\varphi =$$

$$= \alpha \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi + \beta \int_{[a,b]} \langle y,\ f\rangle\, d\varphi =$$

$$= \left\langle \alpha \int_{[a,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle + \left\langle \beta \int_{[a,b]} y\, d\varphi,\ f \right\rangle =$$

$$= \left\langle \alpha \int_{[a,b]} x\, d\varphi + \beta \int_{[a,b]} y\, d\varphi,\ f \right\rangle$$

și să ne reamintim că

$$\langle x,\ f\rangle = \langle y,\ f\rangle,$$

pentru orice $f \in B^*$ implică

$$x = y.$$

Propoziția 7. *Dacă funcția* φ *are derivată* φ' *continuă pe* $[a, b]$, *atunci*

$$\int_{[a,b]} x\, d\varphi = \int_{[a,b]} \varphi'(t)\, x(t)\, dt.$$

Demonstrație. Dacă $f \in B^*$, avem

$$\left\langle \int_{[a,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle = \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi = \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, \varphi'\, dt =$$

$$= \int_{[a,b]} \langle \varphi' x,\ f\rangle\, dt = \left\langle \int_{[a,b]} \langle \varphi' x\, dt,\ f\right\rangle,$$

de unde rezultă afirmația propoziției.

Propoziția 8. *Dacă* φ *și* ψ *sînt funcții cu variația mărginită și* α, β *scalari, atunci*

$$\int_{[a,b]} x d(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{[a,b]} x\, d\varphi + \beta \int_{[a,b]} x\, d\psi.$$

Demonstrație. Pentru orice $f \in B^*$,

$$\left\langle \int_{[a,b]} x\, d(\alpha\varphi + \beta\psi),\ f \right\rangle = \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, d(\alpha\varphi + \beta\psi) =$$

$$= \alpha \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi + \beta \int_{[a,b]} \langle x, f\rangle\, d\psi =$$

$$= \left\langle \alpha \int_{[a,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle + \left\langle \beta \int_{[a,b]} x\, d\psi,\ f \right\rangle =$$

$$= \left\langle \alpha \int_{[a,b]} x\, d\varphi + \beta \int_{[a,b]} x\, d\psi,\ f \right\rangle,$$

de unde rezultă afirmația propoziției.

Propoziția 9. *Dacă șirul* $\{x_n(t)\}$ *converge uniform către funcția* $x(t)$ *cînd* $n \to \infty$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} x_n\, d\varphi = \int_{[a,b]} x\, d\varphi.$$

Demonstrație. Notăm

$$\varepsilon_n = \sup_{t\in[a,b]} \| x_n(t) - x(t) \|.$$

Prin ipoteză

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Propoziția 5 ne permite să scriem

$$\left\| \int_{[a,b]} x_n\, d\varphi - \int_{[a,b]} x\, d\varphi \right\| = \left\| \int_{[a,b]} (x_n - x)\, d\varphi \right\| \leqslant \varepsilon_n \cdot V(\varphi),$$

de unde deducem

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_{[a,b]} x_n\, d\varphi - \int_{[a,b]} x\, d\varphi \right\| = 0$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} x_n\, d\varphi = \int_{[a,b]} x\, d\varphi.$$

Propoziția 10. *Dacă* $a < c < b$, *atunci*

$$\int_{[a,b]} x\, d\varphi = \int_{[a,c]} x\, d\varphi + \int_{[c,b]} x\, d\varphi.$$

Demonstrație. Pentru orice $f \in B^*$, avem

$$\left\langle \int_{[a,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle = \int_{[a,b]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi = \int_{[a,c]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi + \int_{[c,b]} \langle x,\ f\rangle\, d\varphi =$$

$$= \left\langle \int_{[a,c]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle + \left\langle \int_{[c,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle = \left\langle \int_{[a,c]} x\, d\varphi + \int_{[c,b]} x\, d\varphi,\ f \right\rangle$$

ceea ce demonstrează propoziția.

4. Un caz particular important al integralei Riemann-Stieltjes este integrala Riemann, care corespunde funcției $\varphi(t) = t$.

Pentru această integrală se demonstrează imediat

Propoziția 11. *Dacă $\alpha(t)$ este o aplicație a segmentului $[a, b]$ în el însuși, având derivată $\alpha'(t)$ continuă și strict monotonă pe $[a, b]$, atunci*

$$\int_a^b x(\alpha(t))\, \alpha'(t)\, dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} x(t)\, dt.$$

5. Să considerăm spațiul Banach $\mathfrak{L}(B)$ al aplicațiilor liniare și continue T ale spațiului B în el însuși, normat prin

$$\| T \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1} \| T(x) \|.$$

În acest caz, dacă $t \to T_t$ este o aplicație continuă a segmentului $[a, b]$ în $\mathfrak{L}(B)$ și φ o funcție cu variație mărginită, se poate defini integrala

$$U = \int_{[a,b]} T_t\, d\varphi(t).$$

Evident $U \in \mathfrak{L}(B)$. Putem prin urmare considera elementul $U(x)$ pentru orice $x \in B$.

Se poate scrie

$$U(x) = \left(\int_{[a,b]} T_t\, d\varphi(t) \right)(x).$$

De altă parte, pentru orice $x \in B$, $t \to T_t(x)$ este o aplicație continuă a segmentului $[a, b]$ în B, întrucît

$$\| T_{t+h}(x) - T_t(x) \| \leqslant \| (T_{t+h} - T_t)(x) \| \leqslant \| T_{t+h} - T \| \cdot \| x \|.$$

Prin urmare se poate defini și integrala

$$\int_{[a,b]} T_t(x)\, d\varphi(t)$$

care este evident un element din B. Avem

$$\int_{[a,b]} T_t(x)\, d\varphi(t) = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n(p)} T_{t_i^{(p)}}(x) \left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)}) \right] =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n(p)} T_{t_i^{(p)}} \left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)}) \right] \right)(x) =$$

$$= \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n(p)} T_{t_i^{(p)}} \left[\varphi(\tau_i^{(p)}) - \varphi(\tau_{i-1}^{(p)}) \right] \right)(x) =$$

$$= \left(\int_{[a,b]} T_t\, d\varphi(t) \right)(x),$$

dacă $\delta_p = \{\tau_0^{(p)}, \tau_1^{(p)}, \ldots, \tau_{n(p)}^{(p)}\}$ sînt diviziuni convenabil alese.

Deducem imediat egalitatea importantă

$$\int_{[a,b]} T_t(x)\, d\varphi(t) = \left(\int_{[a,b]} T_t\, d\varphi(t) \right)(x).$$

§ 3. Funcții de o variabilă complexă cu valori într-un spațiu vectorial normat complex

În acest paragraf vom considera numai spații vectoriale normate complexe.

Noțiunea de bază pe care o studiem este aceea de funcție olomorfă.

1. În prealabil vom preciza cîteva noțiuni din topologia planului complex.

O mulțime A se numește conexă dacă nu poate fi descompusă în două părți disjuncte complementare și deschise în A.

O submulțime conexă maximală a unei mulțimi deschise se numește componentă.

Definiția 1. *O mulțime D se numește domeniu Cauchy dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:*

a) *D este deschisă;*

b) *D are un număr finit de componente $\{D_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ astfel încît*

$$\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \theta, \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j);$$

c) *frontiera mulțimii D este formată dintr-un număr finit de curbe rectificabile închise. (O curbă rectificabilă este dată de o funcție $z(t)$ continuă, cu variația mărginită, definită pe un segment).*

O componentă a unui domeniu Cauchy este un domeniu Cauchy.

Distingem noțiunea de domeniu Cauchy de aceea obișnuită de domeniu, adică mulțime deschisă conexă.

Un domeniu Cauchy nemărginit are o singură componentă nemărginită, care conține, evident, exteriorul unui cerc.

Frontiera unui domeniu Cauchy mărginit D este formată dintr-o curbă închisă C, astfel că D se găsește în partea mărginită a planului, determinată de C și un număr finit de curbe închise $\{C_\alpha\}$ incluse în această parte mărginită. Evident că două curbe C_α nu pot avea puncte comune și nici una din ele nu poate fi inclusă în partea mărginită a planului determinată de alta.

Din considerațiile precedente apare clară și structura unui domeniu Cauchy cu mai multe componente.

Notăm frontiera domeniului Cauchy D prin $F(D)$.

Dacă Γ este una din curbele care compun această frontieră, vom lua ca sens pozitiv pe Γ sensul indus de sensul pozitiv pe frontiera $F(D)$.

2. Considerăm acum funcții definite în planul complex C și cu valori în spațiul Banach B. În general, noi nu vorbim decît de funcții uniforme.

Definiția 2. *Fie $x(z)$ o funcție definită în planul complex C și cu valori în spațiul Banach B. Numim derivata funcției x în punctul z elementul (din B)*

$$x'(z) = \lim_{z' \to z} \frac{1}{z' - z} [x(z') - x(z)]$$

(dacă există).

Pentru derivatele de ordin superior vom folosi numai definiția clasică, succesivă.

Se poate ajunge la noțiunea de funcție olomorfă plecînd de la condiția de derivabilitate.

Preferăm însă o definiție, care ne oferă de la început posibilitatea de a mînui ușor funcțiile olomorfe.

Definiția 3. *Fie $x(z)$ o funcție definită pe domeniul D din planul complex C și cu valori în spațiul Banach B. Funcția $x(z)$ se numește olomorfă în domeniul D, dacă pentru orice funcțională liniară continuă $f \in B^*$, funcția cu valori complexe $f(x(z))$ este olomorfă în D.*

Vom vedea îndată că funcțiile olomorfe astfel definite au proprietățile obișnuite.

În prealabil facem următoarea observație asupra funcțiilor olomorfe cu valori complexe.

Propoziția 1. *Pentru orice funcție $\varphi(z)$ definită pe un domeniu D și cu valori complexe și orice domeniu D_0 mărginit și strict interior lui D există un număr real pozitiv $M(\varphi; D_0)$, astfel că pentru orice z, $z + \alpha$, $z + \beta \in D_0$ să avem*

$$\left| \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{\alpha} [\varphi(z + \alpha) - \varphi(z)] - \frac{1}{\beta} [\varphi(z + \beta) - \varphi(z)] \right) \right| \leqslant M.$$

Demonstrație. Funcția din partea stîngă a inegalității precedente se poate pune sub forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)\, dt}{(t - z)(t - z - \alpha)(t - z - \beta)},$$

C fiind un contur compus dintr-un număr finit de curbe rectificabile închise, la distanță pozitivă de D_0 și de frontiera lui D.

Întrucît alegerea acestui contur C nu depinde de punctele z, $z + \alpha$, $z + \beta$, este evident că integrala este mărginită de un număr care nu depinde decît de φ și D_0.

Cu ajutorul propoziției 1 putem demonstra

Teorema 1. *Dacă funcția $x(z)$ definită pe domeniul D din planul complex și cu valori în spațiul Banach B este olomorfă în D, atunci ea este continuă și derivabilă în D, uniform în raport cu z în orice domeniu D_0 mărginit și strict interior lui D.*

Demonstrație. Din definiția olomorfiei pentru funcția $x(z)$ și din propoziția 1 rezultă că, pentru orice funcțională $f \in B^*$, avem

$$|f\{x_1(z;\ \alpha,\ \beta)\}| \leqslant M(f,\ x;\ D_0),$$

unde am notat

$$x_1(z;\ \alpha,\ \beta) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{\frac{1}{\alpha}[x(z+\alpha) - x(z)] - \frac{1}{\beta}[x(z+\beta) - x(z)]\right\},$$

D_0 satisfăcînd condițiile teoremei și z, $z + \alpha$, $z + \beta$ fiind oarecare în D_0. Notația $M(f, x; D_0)$ înseamnă că M depinde de funcția x, însă nu de valorile $x(z)$ ale acestei funcții.

Putem aplica atunci teorema 3, capitolul IV, paragraful 2, care ne asigură că mulțimea $\{\| x_1(z;\ \alpha,\ \beta) \|\}$ este mărginită:

$$\| x_1(x;\ \alpha,\ \beta) \| \leqslant M(x;\ D_0).$$

Facem acum pe α să tindă către 0.

Deoarece expresia care conține pe β are o limită, deducem existența unei funcții $x^1(z)$ astfel încît

$$\left\| \frac{1}{\alpha}[x(z+\alpha) - x(z)] - x^1(z) \right\| \leqslant \| \alpha \| M(x;\ D_0),$$

pentru orice z și $z + \alpha$ în D_0. Deci $x(z)$ are o derivată uniformă în D_0.

3. O aplicație importantă a integralei Riemann-Stieltjes, studiată la paragraful 2, este integrala Cauchy, pe care o vom defini la fel ca pentru funcțiile cu valori complexe.

Definiția 4. *Fie Γ o curbă rectificabilă în planul complex C, definită de ecuația $z = z(t)$, unde $z(t)$ este o funcție continuă, cu variația mărginită, definită pe un segment $[a, b]$. Fie $x(z)$ o funcție continuă definită pe Γ și cu valori în spațiul Banach B. Integrala*

$$\int_a^b x(z(t))\, dz(t)$$

se numește integrala Cauchy a funcției x de-a lungul curbei Γ și se notează

$$\int_\Gamma x(z)\, dz.$$

O consecință imediată a definiției funcțiilor olomorfe și a proprietăților integralei, este următoarea teoremă care generalizează teorema clasică a lui Cauchy.

Teorema 2. *Dacă $x(z)$ este o funcție olomorfă în domeniul D din planul complex C, cu valori în spațiul Banach B, atunci*

$$\int_{\Gamma} x(z)\,dz = 0,$$

pentru orice curbă simplă, închisă și rectificabilă Γ inclusă în D și astfel că partea de plan mărginită, determinată de Γ să fie inclusă în D.

Demonstrație. Prin definiție, dacă f este o funcțională liniară continuă, $f \in B^*$, atunci $f(x(z))$ este o funcție olomorfă în D.

Deci

$$\int_{\Gamma} f(x(z))\,dz = 0,$$

pentru orice $f < B^*$. De aici rezultă

$$f\left(\int_{\Gamma} x(z)\,dz\right) = 0,$$

pentru orice $f \in B^*$ și, prin urmare,

$$\int_{\Gamma} x(z)\,dz = 0.$$

4. Teoria lui Cauchy se extinde în mare măsură la funcțiile cu valori vectoriale.

Teorema 3. *Fie Γ o curbă rectificabilă în planul complex, $x(\tau)$ o funcție continuă definită pe Γ și cu valori în spațiul Banach B și $K(z, \tau)$ o funcție cu valori complexe, avînd următoarele proprietăți:*

a) *există un domeniu D în planul variabilei z astfel încît $K(z, \tau)$ este olomorfă în D pentru orice $\tau \in \Gamma$;*

b) *$K(z, \tau)$ este funcție continuă pe Γ pentru orice $z \in D$.*

În aceste condiții, funcția

$$y(z) = \int_{\Gamma} K(z, \tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

este definită pe D, are valorile în B și este olomorfă în D.

Demonstrație. Funcția $K(z, \tau)\, x(\tau)$ fiind continuă în τ pentru orice $z \in D$, rezultă că integrala este definită, deci funcția $y(z)$ este bine definită pe D și ia valori în spațiul B.

Dacă $f \in B^*$, funcția cu valori complexe

$$f(y(z)) = \int_{\Gamma} K(z, \tau)\, f(x(\tau))\, d\tau$$

este olomorfă în D, deci, prin definiție, funcția $y(z)$ este olomorfă în D.

Un caz particular este

Propoziția 2. *Dacă $x(\tau)$ este o funcție continuă definită pe curba Γ și cu valori în spațiul Banach B, atunci integrala*

$$\int_{\Gamma} \frac{x(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$$

definește o funcție olomorfă în fiecare din părțile planului determinate de Γ.

Acest lucru ne conduce, ca și în cazul clasic, la reprezentarea funcțiilor olomorfe prin integrala Cauchy.

Teorema 4. *Fie $x(z)$ o aplicație olomorfă a domeniului D în spațiul Banach B și Γ o curbă simplă, închisă și rectificabilă inclusă în D, astfel ca partea de plan mărginită de Γ să fie inclusă în D și astfel ca $\arg(\tau - z)$ să crească cu 2π cînd τ descrie curba Γ (sens pozitiv). Atunci*

$$x^{(n)}(z) = \frac{n}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{(\tau - z)^{n+1}}\, x(\tau)\, d\tau, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Demonstrație. Pentru $n = 0$, avem

$$f(x(z)) = \int_{\Gamma} \frac{f(x(\tau))}{(\tau - z}\, d\tau$$

oricare ar fi $f \in B^*$, deci

$$f(x(z)) = f\left(\int_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z}\, x(\tau)\, d\tau\right),$$

de unde deducem

$$x(z) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\tau - z}\, x(\tau)\, d\tau.$$

Pentru $n > 0$ este suficient să mai observăm că

$$\frac{d}{dz} f(x(z)) = f\left[\frac{d}{dz}\, x(z)\right]$$

oricare ar fi $f \in B^*$. Într-adevăr,

$$\frac{1}{\alpha}\left\{f[x(z + \alpha)] - f[x(z)]\right\} = f\left\{\frac{1}{\alpha}[x(z + \alpha) - x(z)]\right\}$$

și cînd $\alpha \to 0$ obținem egalitatea noastră.

Teorema 5. *Dacă funcția $x(z)$ cu valori în spațiul B este olomorfă în cercul $|z - z_0| < r$ și $\|x(z)\| \leqslant M$ în acest cerc, atunci funcția $x(z)$ se poate dezvolta în serie Taylor*

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}\, x^{(n)}(z_0),$$

pentru $|z - z_0| < r$.

Demonstrație. Însemnăm prin Γ un cerc de rază $r_1 < r$, $|z - z_0| < r_1$. Atunci, aplicînd teorema precedentă, avem

$$x^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{x(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

de unde deducem majorările

$$\|x^n(z_0)\| \leqslant \frac{Mn!}{r^n}.$$

Rezultă că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} x^{(n)}(z_0)$$

este absolut convergentă, deci și (tare) convergentă în cercul $|z-z_0| < r$.

De altă parte, pentru orice $f \in B^*$, avem

$$f(x^{(n)}(z)) = \frac{d^n}{dz^n} f(x(z)),$$

deci pentru orice $f \in B^*$, seria

$$f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} x^{(n)}(z_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{n!} f(x^{(n)}(z_0))$$

converge către $f(x(z))$, în cercul considerat. Aceasta înseamnă că seria lui Taylor converge slab către $x(z)$. Deoarece ea converge însă și tare către o limită, această limită coincide cu $x(z)$ și teorema este demonstrată.

Analog se demonstrează și teorema următoare asupra dezvoltării în serie Laurent.

Teorema 6. *Dacă funcția $x(z)$ este olomorfă în coroana circulară*

$$0 \leqslant r_1 < |z-z_0| < r_2 \leqslant \infty$$

atunci este valabilă dezvoltarea

$$x(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} (z-z_0)^n a_n,$$

unde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{(z-z_0)^n} x^{(n)}(z)\, dz,$$

Γ fiind un cerc $|z-z_0| = r$, $r_1 < r < r_2$.

Cu ajutorul dezvoltării în serie Taylor se demonstrează, la fel ca în cazul funcțiilor cu valori complexe.

Teorema 7. *Dacă funcțiile $x(z)$ și $y(z)$ sînt olomorfe în domeniul D și coincid pe un șir de puncte $\{z_n\} \subset D$, convergent către un punct $z \in D$, atunci $x(z) = y(z)$ pe tot domeniul D.*

§ 4. Diferențiala Gâteaux

În acest paragraf și în următoarele vom expune bazele calculului diferențial pentru funcții definite într-un spațiu Banach B și avînd valorile în alt spațiu Banach B'. De obicei astfel de funcții se numesc operații.

În general vom considera că spațiile B și B' au scalarii în corpul K și vom atrage atenția cînd va fi vorba în special de spații reale sau complexe.

1. Noțiunea de diferențială se introduce în spațiile Banach în două moduri. Vom defini mai întîi diferențiala Gâteaux, care corespunde noțiunii de variație din calculul variațional.

Definiția 1. *Fie T o operație definită într-o vecinătate V a punctului $x \in B$ și cu valori în B'.*

Dacă pentru orice $h \in B$ există limita

$$\delta T(x; h) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in R}} \frac{1}{t} [T(x + th) - T(x)] \tag{1}$$

spunem că operația T este diferențiabilă Gâteaux în punctul x.

Aplicația

$$h \to \delta(x; h) \tag{2}$$

se numește diferențiala Gâteaux a operației T în punctul x.

Observăm că diferențiala Gâteaux în punctul x nu este un element din B' ci o operație definită pe B și cu valori în B'.

Următoarele propoziții sînt imediate.

P r o p o z i ț i a 1. *Diferențiala Gâteaux a unei operații în punctul x este operație omogenă în h.*

D e m o n s t r a ț i e. Dacă în (1) punem ah în loc de h, vom avea

$$\delta T(x; ah) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in K}} \frac{1}{t} [T(x + tah) - T(x)] =$$

$$= \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \tau \in K}} \frac{a}{\tau} [T(x + \tau h) - T(x)],$$

unde $\tau = at$, deci

$$\delta T(x; ah) = a \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ \tau \in R}} [T(x + \tau h) - T(x)] = a \delta T(x; h).$$

Din propoziția 1 rezultă că este suficient ca limita (1) să existe pentru orice element $h \in B$ cu $\| h \| = 1$.

P r o p o z i ț i a 2. *Dacă operația T este diferențiabilă Gâteaux în punctul x, atunci ea este continuă în x pe orice varietate liniară afină cu o dimensiune* (reală sau complexă, după cum spațiul B este real sau complex).

D e m o n s t r a ț i e. O varietate liniară afină cu o dimensiune care conține punctul x este formată din punctele de forma $x + th$ cu h fix și $t \in K$. Existența diferențialei Gâteaux în punctul x implică existența derivatei în punctul $t = 0$ pentru funcția de t $T(x + th)$, deci și continuitatea acestei funcții.

P r o p o z i ț i a 3. *Operațiile liniare L definite pe B și cu valori în B' au diferențială Gâteaux în orice punct $x \in B$.*

D e m o n s t r a ț i e. Dacă L este operație liniară,

$$\frac{1}{t} [L(x + th) - L(x)] = \frac{1}{t} [L(x) + tL(h) - L(x)] = L(h),$$

deci

$$\delta L(x; h) = L(h). \tag{3}$$

P r o p o z i ț i a 4. *Fie T o operație definită în vecinătatea punctului $x \in B$ și cu valori în B' și L o operație liniară și continuă definită pe B' și cu valori în B''.*

Dacă operația T este diferențiabilă Gâteaux în punctul x, atunci și operația LT este diferențiabilă Gâteaux în punctul x
și

$$\delta LT\,(x;h) = L(\delta T(x;\,h)) \tag{4}$$

Demonstrație. Datorită liniarității operației L,

$$\frac{1}{t}[LT(x+th) - LT(x)] = L\left\{\frac{1}{t}[T(x+th) - T(x)]\right\}$$

de unde, ținînd seama și de continuitatea operației L, rezultă

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in K}} \frac{1}{t}[L\,T\,(x+th) - LT(x)] =$$

$$= L\left\{\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in K}} \frac{1}{t}\,[T(x+th) - T(x)\,]\right\} = L(\delta T(x;\,h))\,.$$

2. În legătură cu diferențiala se poate introduce și noțiunea de derivată.

Definiția 2. *Notăm*

$$\delta\,T\,(x;\,h) = T'_x(h)\;T'_x\,.$$

Pentru x variabil, dacă T'_x sînt operații liniare și continue, aplicația

$$x \to T'_x$$

se numește derivata (Gâteaux) a operației T.

Observăm că valorile derivatei sînt operații aparținînd spațiului $\mathfrak{L}\,(B,B')$.

În cazul funcționalelor derivata este o operație definită în B și cu valori în B^* și este numită gradient : $\varphi' = \operatorname{grad}\varphi$.

3. În acest alineat și în restul paragrafului vom considera numai spații Banach reale. Se pot da diferite extensiuni ale formulei creșterilor finite (formula lui Lagrange) din calculul diferențial clasic. Vom extinde mai întîi formula lui Lagrange în cazul funcționalelor, deci $B' = R$, corpul (real) al scalarilor.

Teorema 1. (Formula lui Lagrange pentru funcționale). *Dacă funcționala este diferențiabilă Gâteaux într-o mulțime convexă $A \subset E$, atunci pentru orice x și $x + h \in A$ există un număr θ, $0 < \theta < 1$, astfel încît*

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \delta\varphi(x + \theta h;\,h)\,. \tag{5}$$

Demonstrație. Fie

$$\psi(t) = \varphi(x + th),\quad t \in R.$$

Funcția ψ este evident continuă pe segmentul $[0,1]$ și derivabilă; derivata ei este

$$\psi'(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\varphi(x+th+\tau h) - \varphi(x+th)}{\tau} = \delta\varphi(x+th;\,h)\,.$$

Aplicînd formula lui Lagrange, clasică, funcției ψ, obținem

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) = \psi(1)-\psi(0) = \psi'(\theta) = \delta\varphi(x+\theta h;h),$$

$0<\theta<1$ și teorema este demonstrată.

În alineatul următor vom extinde formula lui Lagrange, într-un anumit sens și pentru operații cu valori într-un spațiu Banach oarecare. Deocamdată utilizăm teorema 1 pentru a demonstra

T e o r e m a 2. *Fie T o operație definită în vecinătatea convexă V a unui punct $x_0 \in B$ și cu valori în B' (B și B' fiind spații Banach reale oarecare). Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții:*

1° *$\delta T(x;h)$ există pentru orice $x \in V$ și este continuă în punctul x_0 pentru oric $h \in B$.*

2° *$\delta T(x_0;h)$ este continuă în $h=0$. Atunci $\delta T(x_0;h)$ este operație liniară și continuă în h.*

D e m o n s t r a ț i e. Dăm mai întîi demonstrația pentru funcționale și apoi o extindem la operații oarecare cu ajutorul funcționalelor liniare și continue.

Deoarece $\delta T(x_0;h)$ este omogenă în h (propoziția 1) este suficient să demonstrăm aditivitatea (cap. II, § 1, propoziția 3).

Fie φ o funcțională care satisface condițiile teoremei, $h_1, h_2 \in B$ elemente fixe și $\varepsilon>0$. Din definiția diferențialei Gâteaux rezultă că există $\eta_1(\varepsilon)>0$ astfel că $|t|<\eta_1$ implică

$$\left|\delta\varphi(x_0;h_1)-\frac{1}{t}[\varphi(x_0+th_1)-\varphi(x_0)]\right|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\delta\varphi(x_0;h_2)-\frac{1}{t}[\varphi(x_0+th_2)-\varphi(x_0)]\right|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\delta\varphi(x_0;h_1+h_2)-\frac{1}{t}[\varphi(x_0+th_1+th_2)-\varphi(x_0)]\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

De altă parte există $\eta_2>0$ cu proprietatea următoare: dacă $|t|<\eta_2$, atunci $x_0+th_1 \in V$ și $x_0+th_1+th_2 \in V$.

Presupunem că sînt îndeplinite ultimele relații și aplicăm formula lui Lagrange:

$$\frac{1}{|t|}|\varphi(x_0+th_1+th_2)+\varphi(x_0)-\varphi(x_0+th_2)-\varphi(x_0+th_1)| =$$

$$=\frac{1}{|t|}|\delta\varphi(x_0+th_2+\theta_1 th_1;th_1)-\delta\varphi(x_0+\theta_2 th_1;th_1)| =$$

$$=|\delta\varphi(x_0+th_2+\theta_1 th_1;h_1)-\delta\varphi(x_0+\theta_2 th_1;h_1)| \leqslant$$

$$\leqslant|\delta\varphi(x_0+th_2+\theta_1 th_1;h_1)-\delta\varphi(x_0;h_1)|+|\delta\varphi(x_0+$$

$$+\theta_2 th_1;h_1)-\delta\varphi(x_0;h_1)|.$$

Însă $\delta\varphi\,(x;h_1)$, pentru h_1 fix, este funcție continuă în punctul x_0, deci pentru η_2 suficient de mic,

$$|\,\delta\,\varphi\,(x_0+th_2+\theta_1 th_1\,;\,h_1)-\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1)\,|<\frac{\varepsilon}{8},$$

$$|\,\delta\varphi\,(x_0+\theta_2 th_1)-\delta\,(x_0\,;\,h_1)\,|<\frac{\varepsilon}{8},$$

de unde

$$\frac{1}{|\,t\,|}\,|\,\varphi\,(x_0+th_1+th_2)+\varphi\,(x_0)-\varphi\,(x_0+th_2)-\varphi\,(x_0+th_1)\,|<\frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Dacă luăm $\eta=\min\,(\eta_1,\,\eta_2)$ și $|\,t\,|<\eta$, obținem

$$|\,\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1+h_2)-\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1)-\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_2)\,|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\,\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1+h_2)-\frac{1}{t}\,[\varphi\,(x_0+th_1+th_2)-\varphi\,(x_0)]\right|+$$

$$+\left|\,\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1)-\frac{1}{t}\,[\varphi\,(x_0+th_2)-\varphi\,(x_0)]\right|+$$

$$+\left|\,\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_2)-\frac{1}{t}\,[\varphi\,(x_0+th_2)-\varphi\,(x_0)]\right|+$$

$$+\frac{1}{t}\,|\,\varphi(x_0+th_1+th_2)+\varphi\,(x_0)-\varphi\,(x_0+th_1)-\varphi\,(x_0+th_2)\,|\,.$$

Deoarece ε este arbitrar,

$$\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1+h_2)-\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1)-\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_2)=0$$

și aditivitatea funcționalei $\delta\varphi$ este demonstrată.

Fie acum T operația din enunțul teoremei și f o funcțională liniară și continuă definită pe B' ($f\in B'^{*}$).

Funcționala $\varphi=fT$, definită pe aceeași mulțime ca și T, satisface condițiile teoremei (propoziția 4), deci putem aplica rezultatul obținut în prima parte a demonstrației:

$$\delta\varphi(x_0\,;\,h_1+h_2)=\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_1)+\delta\varphi\,(x_0\,;\,h_2)\,.$$

Această egalitate este însă echivalentă cu

$$f\,[\delta T\,(x_0\,;\,h_1+h_2)]=f\,[\delta\,T\,(x_0\,;\,h_1)]+f\,[\delta T\,(x_0\,;\,h_2)]=$$
$$=f[\delta T\,(x_0\,;\,h_1)+\delta T\,(x_0\,;\,h_2)]\,.$$

Ultimele egalități fiind adevărate pentru orice $f\in B'^{*}$, rezultă

$$\delta T\,(x_0\,;\,h_1+h_2)=\delta T\,(x_0\,;\,h_1)+\delta T\,(x_0\,;\,h_2).$$

Teorema este astfel complet demonstrată.

4. Formula lui Lagrange se poate generaliza pentru operații cu valori într-un spațiu de funcționale.

Teorema 3. *Fie T o operație definită în vecinătatea lui $x\in B$ și cu valori într-un spațiu conjugat $B'=B_1{}^{*}$.*

Presupunem că T are derivată în orice punct al unei mulțimi convexe $A \ni x$. Atunci pentru orice h_2 astfel ca $x + h_2 \in A$ și orice $h_1 \in B_1$ există un număr τ, $0 < \tau < 1$, care verifică relația

$$\langle h_1,\ T(x + h_2) - T(x) \rangle = \langle h_1,\ T'_{x+\tau h_2}(h_2) \rangle . \tag{6}$$

Demonstrație. Notăm

$$\varphi(x, h_1) = \langle h_1, T(x) \quad , \quad (h_1 \in B_1).$$

Pentru orice $h_1 \in B_1$, funcționala φ (în x) este derivabilă în A și

$$\delta\varphi(x, h_1;\ h_2) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x + th_2,\ h_1) - \varphi(x,\ h_1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \langle h_1,\ \frac{T(x + th_2) - T(x)}{t} \rangle = \langle \delta T(x;\ h_2), h_1 \rangle.$$

Putem aplica formula lui Lagrange

$$\varphi(x + h_2,\ h_1) - \varphi(x, h_1) = \delta\varphi(x + \tau h_2, h_1;\ h_2) =$$
$$= \langle h_1,\ \delta T(x + \tau h_2;\ h_2) \rangle ,\ (0 < \tau < 1),$$
$$\text{deci } \langle h_1, T(x + h_2) - T(x) \rangle = \langle h_1,\ \delta T(x + \tau h_2;\ h_2) \rangle$$

și teorema este demonstrată.

Știm însă că orice spațiu Banach este format din funcționale definite pe dualul său. Pentru orice spațiu B' avem $B' \subset (B'^*)^*$ de unde rezultă următoarea variantă a teoremei 3 :

Teorema 4. *Fie T o operație definită în vecinătatea lui $x \in B$ și cu valori în B'. Presupunem că T are derivată în orice punct al unei mulțimi convexe $A \ni x$. Atunci pentru orice h_2 astfel încît $x + h_2 \in A$ și orice $h_1 \in B'^*$ există un număr τ, $0 < \tau < 1$, care verifică relația*

$$\langle T\ (x + h_2) - T\ (x), h_1 \rangle = \langle T'_{x+\tau h_2}\ (h_2), h_1 \rangle . \tag{7}$$

5. Condițiilor de integrabilitate totală din analiza clasică le corespunde în spațiile Banach

Teorema 5. *Fie S o operație definită într-o vecinătate convexă simetrică V a punctului $x_0 \in B$, cu valori în $\mathfrak{L}(B, B')$ și satisfăcînd condițiile*

1) *Există diferențiala Gâteaux $\delta S(x,h) = S'_x(h)$ liniară și continuă în h pentru orice $x \in V$.*

2) *Operația $S'_x(h_1)(h_2)$ este continuă planar în fiecare punct $x \in V$, pentru orice h_1, $h_1 \in B$.*

În aceste condiții, pentru ca operația S să fie derivata unei operații T, definită în B și cu valori în B', este necesar și suficient ca operația biliniară $S'_x(h_1)(h_2)$ să fie simetrică în h_1 și h_2, adică

$$S'_x(h_1)(h_2) = S'_x\ (h_2)(h_1). \tag{8}$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Considerăm mai întîi cazul unei operații Φ definită în B și cu valori în B^* (în acest caz $B' = R$) și presupunem că Φ este gradientul unei funcționale φ, definită în B :

$$\Phi = \text{grad}\ \varphi.$$

Dacă fixăm elementele h_1 și $h_2 \in B$, există două numere reale a, b astfel încît $x + ah_1 \in V$, $x + bh_2 \in V$.

Vecinătatea V fiind presupusă convexă și simetrică, pentru orice α și β satisfăcînd inegalitățile $|\alpha| \leqslant a$, $|\beta| \leqslant b$ avem de asemenea $x + \alpha h_1 \in V$, $x + \beta h_2 \in V$.

Considerăm expresia

$$\Delta = \varphi(x + ah_1 + bh_2) - \varphi(x + ah_1) - \varphi(x + bh_2) + \varphi(x).$$

Folosind funcțiile

$$\psi_1(x) = \varphi(x + ah_1) - \varphi(x),$$
$$\psi_2(x) = \varphi(x + bh_2) - \varphi(x),$$

expresia Δ se poate scrie

$$\Delta = \psi_1(x + bh_2) - \psi_1(x) = \psi_2(x + ah_1) - \psi_2(x).$$

Ultimelor două diferențe le putem aplica formula lui Lagrange și obținem

$$\Delta = \delta\psi_1(x + \tau_1 bh_2;\ bh_2) = \delta\psi_2(x + \tau_2 ah_1; ah_1),\quad (0 < \tau_1, \tau_2 < 1).$$

Însă

$$\delta\psi_1(x + \tau_1 bh_2;\ bh_2) =$$
$$= \delta\varphi(x + \tau_1 bh_2 + ah_1;\ bh_2) - \delta\varphi(x + \tau_1 bh_2;\ bh_2) =$$
$$= \langle bh_2, \Phi(x + \tau_1' bh_2 + ah_1)\rangle - \langle bh_2, \Phi(x + \tau_1 bh_2)\rangle =$$
$$= b\langle h_2, \Phi(x + \tau_1 bh_2 + ah_1) - \Phi(x + \tau_1 bh_2)\rangle.$$

Aplicînd ultimei expresii relația (6),

$$\Delta = b\langle h_2,\ \delta\Phi(x + \tau_1 bh_2 + \tau_3 ah_1;\ ah_1)\rangle =$$
$$= ab\langle h_2,\ \delta\Phi(x + \tau_1 bh_2 + \tau_3 ah_1;\ h_1)\rangle.$$

În mod analog se obține

$$\Delta = ab\langle h_1,\ \delta\Phi(x + \tau_2 ah_1 + \tau_4 bh_2;\ h_2\rangle.$$

Datorită continuității planare în punctul x, dacă facem pe a și b să tindă către 0, obținem

$$\langle h_2,\ \delta\Phi(x; h_1)\rangle = \langle h_1,\ \delta\Phi(x; h_2)\rangle \qquad (9)$$

ceea ce este echivalent cu (8) în cazul operației.

Să considerăm acum cazul general al unei operații S satisfăcînd condițiile teoremei.

Fie f o funcțională liniară continuă definită pe B'. Funcționala f poate fi compusă cu orice element din $\mathfrak{L}(B, B')$ deci și cu orice operator definit în B și cu valori în $\mathfrak{L}(B, B')$.

Operația $\Phi = fS$ este definită în B, are valori în B^* și satisface condițiile teoremei, deci, potrivit primei părți a demonstrației, verifică relația (9), care este echivalentă cu

$$\langle S_x'(h_1)(h_2),\ f\rangle = \langle S_x'(h_2)(h_1), f\rangle.$$

Ultima relație fiind adevărată pentru orice $f \in B'^*$, rezultă

$$S'_x(h_1)\ (h_2) = S'_x(h_2)\ (h_1)$$

Am demonstrat astfel necesitatea acestei condiții. Vom demonstra acum că ea este și suficientă.

Fie

$$T(x) = T(x_0) + \int_0^1 S(x_0 + t(x - x_0))\ (x - x_0)\, dt,$$

unde $T(x_0)$ este element arbitrar din B'.

Integrala există pentru că S este funcție continuă de t. Vom arăta că

$$T'_x = S(x).$$

Pentru $x \in V$ și $x + h \in V$ avem

$$T(x + h) - T(x) =$$

$$= \int_0^1 \{S(x_0 + t(x + h - x_0))(x + h - x_0) - S(x_0 + t(x - x_0))\ (x - x_0)\} dt =$$

$$= \int_0^1 S(x_0 + t(x - x_0) + th)\ (h)\, dt +$$

$$+ \int_0^1 [S\ (x_0 + t\ (x + h - x_0)) - S(x_0 + t\ (x - x_0))]\ (x - x_0)\, dt.$$

Ultima integrală este egală cu

$$\int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} (S(x_0 + t(x - x_0) + sh))\ (x - x_0)\, ds =$$

$$= \int_0^1 dt \int_0^t [\delta\ S(x_0 + t(x - x_0) + sh\,;\, h)]\ (x - x_0)\, ds =$$

$$= \int_0^1 ds \int_0^1 [\delta\ S(x_0 + t(x - x_0) + sh\,;\ x - x_0)]\ (h)\ dt =$$

$$= \int_0^1 [S(x_0 + (x - x_0) + sh) - S(x_0 + s(x - x_0) + sh)]\ (h)\, ds$$

deci

$$T(x + h) - T(x) = \int_0^1 S(x + sh)\ (h)\, ds.$$

De aici

$$\frac{T(x + th) - T(x)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^1 S(x + sth)\ (th)\ ds =$$

$$= \int_0^1 S(x + sth)\ (h)\ ds$$

și

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(x+th)-T(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_0^1 S(x+sth)(h)\,ds=$$

$$=\int_0^1[\lim_{t\to 0}S(x+sth)(h)]\,ds=S(x)(h)\,,$$

deci operația S este derivata operației T.

Teorema este astfel complet demonstrată.

§ 5. Diferențiala Fréchet

Proprietățile diferențialei Gâteaux nu sînt suficiente pentru aplicațiile noțiunii de diferențială. Vom da în acest paragraf o nouă definiție a diferențialei datorită lui Fréchet și vom stabili condiții în care diferențiala Gâteaux este și diferențială Fréchet.

1. Fie B, B' două spații Banach cu scalari în corpul K și o operație T definită în vecinătatea punctului $x\in B$ și cu valori în B'.

Definiție. *Dacă există o operație liniară și continuă în h ($h\in B$), $dT(x;h)$, care satisface condiția*

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{1}{\|h\|}\|T(x+h)-T(x)-dT(x;h)\|=0, \tag{1}$$

spunem că operația T este diferențiabilă Fréchet în punctul x și numim diferențială Fréchet a operației T în punctul x aplicația $h\to dT(x;h)$ a lui B în B'.

Proprietățile diferențialei Gâteaux se păstrează și pentru diferențiala Fréchet datorită următoarei teoreme:

Teorema 1. *Dacă operația T este diferențiabilă Fréchet în punctul x, atunci ea are și diferențială Gâteaux în acest punct și*

$$\delta T(x;h)=dT(x;h).$$

Demonstrație. Fie

$$\omega(x;th)=T(x+th)-T(x)-dT(x;th).$$

Condiția (1) ne dă

$$\lim_{\|th\|\to 0}\frac{\|\omega(x;th)\|}{\|th\|}=0.$$

Dacă fixăm elementul h și facem pe t să tindă către 0, putem înlocui numitorul cu t și obținem

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|\omega(x;th)\|}{|t|}=0$$

adică

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|t|}\|T(x+th)-T(x)-dT(x;th)\|=0$$

ceea ce este echivalent cu

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [T(x + th) - T(x)] = dT(x; h), \tag{2}$$

pentru că $dT(x; th) = tdT(x; h)$. Relația (2) ne arată că există diferențiala Gâteaux a operației T în punctul x și este egală cu diferențiala Fréchet.

2. Următoarele teoreme ne arată că diferențiala Fréchet are și proprietăți care nu sînt valabile pentru diferențiala Gâteaux.

Teorema 2: *Dacă operația T are diferențială Fréchet în punctul x, atunci ea este continuă în acest punct.*

Demonstrație. Din condiția (1) deducem

$$T(x + h) - T(x) = dT(x; h) + \omega(x; h),$$

unde

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x; h)\|}{\|h\|} = 0.$$

De altă parte, deoarece $dT(x; h)$ este operație liniară și continuă, există un număr $M > 0$, astfel ca

$$\|dT(x; h)\| \leqslant M \|h\|.$$

Este evident atunci că pentru $h \to 0$ avem

$$\lim_{h \to 0} T(x + h) = T(x),$$

deci operația T este continuă în punctul x.

Teorema 3. *Fie B, B', B'' trei spații Banach. Presupunem că operația T este definită într-o vecinătate a punctului $x \in B$ și are valori în B', iar operația S este definită într-o vecinătate a punctului $y = T(x) \in B'$ și are valori în B''. Dacă T este diferențiabilă Fréchet în punctul x și S este diferențiabilă Fréchet în punctul y, atunci operația compusă $R = ST$ este diferențiabilă Fréchet în punctul x și*

$$R'_x(h) = S'_y(T'_x(h)).$$

Demonstrație. Fie

$$K = T(x + h) - T(x).$$

Deoarece operația T este diferențiabilă Fréchet în punctul x, este valabilă relația

$$K = T'_x(h) + \omega(x; h), \tag{3}$$

unde

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x; h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Operația $T'_x(h)$ fiind liniară și continuă în h, există un număr $M > 0$ astfel încît

$$\|T'_x(h)\| \leqslant M \|h\|.$$

Deducem inegalitatea

$$\| K \| \leqslant M \| h \| + \| \omega (x; h) \|$$

de unde rezultă că, pentru $\| h \|$ suficient de mic, raportul $\frac{\| K \|}{\| h \|}$ este mărginit.

Să considerăm acum diferența

$$R (x + h) - R (x) - S_y' (T_x' (h)). \tag{4}$$

Mai întîi

$$R (x + h) - R (x) = S (T (x + h)) - S (T (x) =$$

$$= S (y + k) - S (y) = S_y' (k) + \Omega (x; k)$$

de unde rezultă că diferența (4) este egală cu

$$S_y' (k) - S_y' (T_x' (h)) + \Omega (y; k) =$$

$$= S_y' (k - T_x' (h)) + \Omega (y; k).$$

Însă

$$K - T_x' (h) = T (x + h) - T (x) - T_x' (h) = \omega (x; h)$$

deci diferența (4) devine

$$\Omega (y; K) + S_y' (\omega (x; h)).$$

Norma acestei expresii împărțită la $\| h \|$ se poate scrie

$$\frac{\| \Omega (y; k) + S_y' (\omega (x; h) \|}{\| h \|} =$$

$$= \left\| \frac{\Omega (y; k)}{\| h \|} + S_y' \left(\frac{\omega (x; h)}{h} \right) \right\| \leqslant \frac{\| \Omega (y; k) \|}{\| h \|} + \left\| S_y' \left(\frac{\omega (x; h)}{h} \right) \right\|.$$

Pentru $\| h \| \to 0$, primul termen al ultimei sume tinde către 0, deoarece se poate pune sub forma

$$\frac{\| \Omega (y; k) \|}{\| k \|} \cdot \frac{\| k \|}{\| h \|},$$

unde primul raport tinde către 0, iar al doilea rămîne mărginit.

De asemenea este evident că

$$\lim_{\| h \| \to 0} \left\| S_y' \frac{\omega (x; h)}{\| h \|} \right\| = 0$$

datorită continuității operației S_y'.

Am arătat astfel că

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| R (x + h) - R (x) - S_y' (T_x' (h)) \|}{\| h \|} = 0.$$

De altă parte operația S_y' $(T_x'(h))$ este liniară și continuă în h, deci într-adevăr aceasta este diferențiala Fréchet a operației R în punctul x.

3. În acest aliniat considerăm numai spații reale.

Definiția diferențialei Fréchet nu ne dă și un procedeu de calcul, însă calculul ei se poate face, dacă-i cunoaștem existența prin diferențiala Gâteaux, cu care este egală. Condițiile definiției 1 sînt greu de verificat în practică, ceea ce ne conduce să căutăm criterii pentru ca diferențiala Gâteaux să fie și diferențială Fréchet.

Un astfel de criteriu pentru diferențiabilitatea într-un punct ne dă

T e o r e m a 4. *Dacă există derivata* T' (Gâteaux) *a operației* T *într-o vecinătate a punctului* x_0 *și este continuă în* x_0 (față de topologia normei din $\mathfrak{L}(B, B')$), *atunci operația* T *este diferențiabilă Fréchet în punctul* x_0.

D e m o n s t r a ț i e. Fie

$$\omega(x_0; h) = T(x_0 + h) - T(x_0) - \delta T(x_0; h).$$

Aplicînd diferenței $T(x_0 + h) - T(x_0)$ relația (7) din paragraful precedent obținem, pentru $\| h \|$ suficient de mică

$$\langle T(x_0+h) - T(x_0), h_1 \rangle = \langle T'_{x_0+\tau h}(h), h_1 \rangle .$$

unde $h_1 \in B'^*$ și $0 < \tau < 1$ depinde de h și h_1. Înlocuind

$$\langle \omega(x_0; h), h_1 \rangle = \langle T'_{x_0+\tau h} - T'_{x_0})(h), h_1 \rangle$$

de unde obținem

$$\langle \omega(x_0; h), h_1 \rangle | \leqslant \| T'_{x_0+\tau h} - T'_{x_0} \| \, \| h \| . \| h_1 \|$$

sau

$$\frac{|\langle \omega(x_0; h), h_1 \rangle|}{\| h_1 \|} \leqslant \| T'_{x_0+\tau h} - T_{x_0} \| \cdot \| h \| .$$

Deducem de aici

$$\| \omega(x_0; h) \| \leqslant \sup_{\tau \in [0,1]} \| T'_{x_0+\tau h} - T_{x_0} \| \cdot \| h \| .$$

Însă marginea superioară, din dreapta inegalității este atinsă, datorită continuității, pentru τ_0 fix, deci

$$\| \omega(x_0; h) \| \leqslant \| T'_{x_0+\tau h} - T'_{x_0} \| \cdot \| h \|, \; (0 \leqslant \tau \leqslant 1).$$

Întrucît pentru $h \to 0$, tinde către 0 și $\tau_0 h$ și operația T'_x este continuă în x_0, obținem

$$\lim_{\| h \| \to 0} \frac{\| \omega(x_0; h \|}{\| h \|} = 0,$$

deci condiția (1) din definiția diferențialei Fréchet este verificată. Evident că în acest caz diferențiala Gâteaux este și diferențială Fréchet în punctul x_0.

§ 6. Diferențiabilitatea în spațiile Banach complexe. Funcții analitice

În acest paragraf, funcția f este definită într-un spațiu Banach complex B și are valori în alt spațiu Banach complex B'.

1. Introducem mai întîi cîteva noțiuni speciale de topologie.

Definiția 1. *O mulțime D a spațiului B se numește finit deschisă, dacă intersecția ei cu orice subspațiu Banach cu un număr finit de dimensiuni B_1 al spațiului B este o mulțime deschisă în B_1.*

Este clar că orice mulțime deschisă este și finit deschisă. Reciproca însă nu este adevărată: există mulțimi finit deschise care nu sînt deschise, cum se vede din următorul exemplu:

Fie $\{x_n\} \subset B$ un șir de elemente astfel ca: (1) pentru orice n, punctul x_{n+1} nu este inclus în subspațiul cu n dimensiuni generat de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (presupunem că B nu are un număr finit de dimensiuni).

2) Șirul $\{x_n\}$ este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Fie A mulțimea complementară șirului $\{x_n\}$ în B. Este evident că $x_0 \in A$, deci mulțimea A nu poate fi deschisă în B.

De altă parte însă, orice subspațiu cu un număr finit de dimensiuni B_1, conține cel mult un număr finit de elemente din $\{x_n\} = \complement A$, de unde rezultă că mulțimea A este finit-deschisă.

Definiția 2. *O mulțime $\mathfrak{S} \subset B$ se numește o stea în jurul punctului x_0 dacă mulțimea $\mathfrak{S}$ este de forma $x_0 + H$, unde H verifică următoarea condiție:*

pentru orice $h \in H$ și orice număr complex z astfel ca $|z| \leqslant 1$, avem $z\,h \in H$.

Propoziție. *Dacă mulțimea finit-deschisă D conține punctul x_0, atunci ea conține o stea în jurul punctului x_0, formată din punctele $x_0 + h$ pentru care $|z| \leqslant 1$ implică $x_0 + zh \in D$.*

Definiția 3. *Fie D o mulțime finit-deschisă.*

Notăm prin $\rho(x; h, D)$ marginea superioară a numerelor ρ pentru care $|z| \leqslant \rho$ implică $x + z\,h \in D$.

2. Cu aceste noțiuni vom studia proprietățile funcțiilor diferențiabile Gâteaux.

Teorema 1. *Funcția $f(x)$ este diferențiabilă Gâteaux pe mulțimea finit-deschisă D, dacă și numai dacă pentru orice $x \in D$ și $h \in B$, $f(x + z\,h)$ este o funcție olomorfă în z pe cercul deschis $|z| < \rho(x, h)$.*

Demonstrație. Derivata funcției $f(x + z\,h)$ în punctul z_0 este dată de

$$\left[\frac{d}{dz} f(x + (z_0 + z)\,h)\right]_{z=0} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\Big\{f[(x + z_0 h) + z\,h] - f(x + z_0 h)\Big\} = \delta f(x + z_0\,h;\, h).$$

De aici rezultă teorema.

O consecință a acestei teoreme este teorema următoare, care ne dă un nou criteriu pentru diferențiabilitatea Gâteaux.

Teorema 2. *Funcția $f(x)$ este diferențiabilă Gâteaux pe mulțimea finit-deschisă D, dacă și numai dacă pentru orice $x \in D$ și $h_1, h_2, \ldots, h_n \in B$, funcția $f\left(x + \sum_{i=1}^{n} z_i h_i\right)$ este derivabilă în raport cu fiecare variabilă z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pe mulțimea deschisă $\Delta = \Delta(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ a spațiului C_n, care corespunde punctelor $x + \sum_{i=1}^{n} z_i h_i$ din D.*

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Noțiunile și rezultatele expuse în paragraful 1 se datoresc cercetătorilor sovietici și sînt expuse în cartea [17] de L. A. Liusternik și V. I. Sobolev.

2. Asupra integralelor în spațiile vectoriale normate s-au făcut cercetări mai bogate, avînd ca scop, în special, stabilirea formei operațiilor liniare în diferite spații. Menționăm cercetările matematicienilor sovietici Govurin și Ghelfand și ale lui Pettis, Bochner, Philips etc.

Noi introducem numai integrala Riemann-Stieltjes pe care o utilizăm în special sub forma integralei Cauchy.

3. Studiul funcțiilor analitice în spațiile Banach complexe a fost întreprins în special de I. M. Ghelfand și M. Zorn prin metode analoge cu cele din cazul real. O expunere mai dezvoltată a acestei teorii se găsește în [13].

4. Diferențiabilitatea în spațiile Banach reale este studiată de școala sovietică, a cărei țintă o constituie operațiile neliniare și ecuațiile implicite.

Rezultatele și demonstrațiile din paragrafele 4 și 5 se datoresc lui M. M. Vainberg [262] și G. Marinescu [199], [200]. Aplicații se găsesc în [17] și [262].

CAPITOLUL VII

ALGEBRE BANACH

Calculul diferențial și integral în spațiile Banach și mai ales teoria funcțiilor analitice, s-au dezvoltat în special în legătură cu operatorii liniari.

Însă spațiile Banach formate din operatori liniari au, în general, structuri algebrice mai bogate decît aceea de spațiu vectorial. O operație foarte simplă care se poate introduce într-o mulțime de operatori este compunerea a doi operatori în sensul obișnuit, al compunerii funcțiilor. Într-un spațiu vectorial oarecare, acestei compuneri a doi operatori îi corespunde o nouă operație, pe care o putem numi înmulțire.

Vom studia în acest capitol, spații vectoriale normate sau spații Banach care sînt, în plus, și inele față de adunare și înmulțire, și satisfac condiții suplimentare de compatibilitate între structura topologică și cea de inel. Astfel de inele se numesc, respectiv, algebre normate sau algebre Banach.

Deși înmulțirea din aceste algebre este, în general, necomutativă, prezența ei simplifică și apropie mai mult de cazul clasic, teoria funcțiilor analitice, care devine aici un instrument de cercetare a inversării elementelor.

§ 1. Algebre normate și algebre Banach

1. În acest paragraf definim algebrele Banach și algebrele normate și studiem proprietățile elementelor inversabile.

Definiția 1. *Numim algebră normată un spațiu vectorial normat, care este în același timp un inel față de adunare și față de o operație de înmulțire, pe care o notăm multiplicativ și care satisface condițiile*

$$(a\ x)\,(b\ y) = (a\ b)\,(x\ y),$$

$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dacă spațiul este complet (în topologia normei) spunem că este o algebră Banach.

În cele ce urmează ne vom ocupa în general de algebre normate sau algebre Banach complexe și se va specifica atunci cînd va fi vorba în special de algebre reale.

Vom mai presupune că există un element unitate e şi că $\| e \| = 1$.

Problema care ne interesează în special în algebrele normate este aceea a inversiunii elementelor.

D e f i n i ţ i a 2. *Numim, ca de obicei, inversul unui element x, elementul x^{-1} (dacă există) care verifică relaţiile*

$$x\, x^{-1} = x^{-1} x = e\ .$$

T e o r e m a 1. *Orice element x al unei algebre normate complete, care verifică inegalitatea.*

$$\| x - e \| < 1$$

are un invers

$$x^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n\ .$$

D e m o n s t r a ţ i e. Seria prin care definim inversul este absolut convergentă, pentru că seria normelor este majorată de o serie geometrică de raţie mai mică decît unitatea :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \| (e - x)^n \| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \| e - x \|^n\ ,$$

deci x^{-1} este definit. De altă parte

$$x\, x^{-1} = (e - (e - x)) \left(e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n \right) =$$

$$= e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n - (e - x) - \sum_{n=2}^{\infty} (e - x^n) = e.$$

T e o r e m a 2. *Dacă elementul $x_0 \neq 0$ al unei algebre normate complete are element invers x_0^{-1}, atunci pentru orice x satisfăcînd relaţia*

$$\| x - x_0 \| < \frac{1}{\| x_0^{-1} \|},$$

există elementul invers x^{-1}. Elementul invers este funcţie continuă de x (în sensul normei).

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă

$$\| x - x_0 \| < \frac{1}{\| x_0^{-1} \|}\ ,$$

atunci

$$\| x_0^{-1} (x - x_0) \| \leqslant \| x_0^{-1} \| \cdot \| x - x_0 \| < 1,$$

de unde deducem

$$\| x_0^{-1} x - e \| < 1$$

şi în mod analog,

$$\| x\, x_0^{-1} - e \| < 1.$$

Din teorema precedentă rezultă că elementele $x_0^{-1} x$ şi $x x_0^{-1}$ au elemente inverse, pe care le notăm cu y şi z, respectiv. Însemnăm

$$y x_0^{-1} = y' \text{ şi } x_0^{-1} z = z'.$$

Atunci

$$y' x = y x_0^{-1} x = e.$$

$$x z' = x x_0^{-1} z = e,$$

de unde rezultă că

$$y' = z' = x^{-1}$$

este inversul lui x.

Pentru a demonstra continuitatea inversului, folosim relaţiile

$$x^{-1} - x_0^{-1} = x_0^{-1} (x_0 x^{-1} - x_0 x_0^{-1}) =$$

$$= x_0^{-1} ((x x_0^{-1})^{-1} - e) = x_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (e - x_0^{-1} x)^n ,$$

de unde deducem

$$\| x^{-1} - x_0^{-1} \| \leqslant \| x_0^{-1} \| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (e - x_0^{-1} x)^n \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \| x_0^{-1} \| \sum_{n=1}^{\infty} \| e - x_0^{-1} x \|^n \leqslant \| x_0^{-1} \| \sum_{n=1}^{\infty} \| x_0^{-1} \|^n \| x - x_0 \|^n \leqslant$$

$$\leqslant \| x_0^{-1} \| \frac{\| x_0^{-1} \| \cdot \| x - x_0 \|}{1 - \| x_0^{-1} \| \cdot \| x - x_0 \|} .$$

Dacă $\| x - x_0 \| \to 0$, atunci şi $\| x^{-1} - x_0^{-1} \| \to 0$ şi continuitatea este demonstrată.

T e o r e m a 3. *Mulţimea elementelor inversabile este deschisă.*

D e m o n s t r a ţ i e. Rezultă imediat din teorema precedentă, deoarece această mulţime este reuniune de sfere deschise.

2. O algebră Banach fiind un spaţiu Banach complex, putem aplica teoria funcţiilor de variabilă complexă cu valori într-un spaţiu Banach. Aici ne apropiem şi mai mult de teoria funcţiilor de variabilă complexă obişnuită deoarece există operaţia de înmulţire între elemente şi putem folosi seriile de puteri.

Următoarea teoremă rezultă imediat din proprietăţile funcţii or olomorfe.

T e o r e m a 4. *Seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x^n$$

defineşte o funcţie olomorfă de λ *în cercul*

$$| \lambda - \lambda_0 | < \frac{1}{\| x \|} .$$

D e m o n s t r a ţ i e. Seria este evident absolut convergentă în acest cerc deoarece

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|x\|^n$$

este în acest caz o serie geometrică de raţie < 1.

Deci funcţia

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x^n$$

este bine definită ca o funcţie de variabila complexă λ şi cu valori în algebra B.

Fie acum f o funcţională liniară şi mărginită oarecare, $f \in B^*$ (B fiind considerată ca un spaţiu Banach şi B^* spaţiul său conjugat).

Avem

$$\langle F(\lambda), f\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n x^n , f \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \langle x^n , f\rangle,$$

de unde rezultă

$$|\langle f(\lambda), f\rangle| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n |\langle x^n , f\rangle|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \cdot \|f\| \cdot \|x^n\|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|f\| \cdot \|x\|^n =$$

$$= \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|x\|^n .$$

De aici deducem că funcţia $\langle F(\lambda), f\rangle$ de variabilă complexă şi cu valori complexe este o funcţie olomorfă în cercul

$$|\lambda - \lambda_0|^n \|x\|^n < 1.$$

Cum acest lucru este adevărat pentru orice funcţională $f \in B^*$, rezultă că funcţia $F(\lambda)$ este şi ea olomorfă în acelaşi cerc şi teorema este demonstrată.

În mod analog se demonstrează şi următoarea teoremă, mai generală.

T e o r e m a 5. *Seria*

$$\sum_{n=0} (\lambda - \lambda_0)^n x^n$$

defineşte o funcţie olomorfă în cercul $|\lambda - \lambda_0| < \rho$, unde

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to \infty} \|x_n\|^{1/n}.$$

În afara acestui cerc, seria este divergentă.

§ 2. Ecuația rezolvantă

1. Considerăm acum următoarea ecuație funcțională

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda)\, R(\mu), \tag{1}$$

în care R este funcția necunoscută, definită în planul complex și cu valori în algebra Banach B. Această ecuație joacă un rol important în teoria ecuațiilor liniare.

Teorema 1. *Fie $R(\lambda)$ o funcție (uniformă) definită pe un domeniu D din planul complex și cu valori în algebra Banach B. Dacă această funcție verifică ecuația rezolvantă* (1), *atunci este o funcție olomorfă în domeniul D.*

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că valorile funcției $R(\lambda)$ sînt permutabile în algebra B, adică

$$R(\lambda)\, R(\mu) = R(\mu)\, R(\lambda)$$

oricare ar fi λ și μ în D. Într-adevăr,

$$R(\lambda)\ R(\mu) = \frac{1}{\mu - \lambda}\,(R(\lambda) - R(\mu)) =$$

$$= \frac{1}{\lambda - \mu}\,(R(\mu) - R(\lambda)) = R(\mu)\, R(\lambda).$$

Fie acum $\lambda_0 \in D$. Înlocuind pe μ prin λ_0 în ecuația (1) obținem

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda)\, R(\lambda)\, R(\lambda_0)$$

sau

$$R(\lambda)\ \ [e + (\lambda - \lambda_0)\, R(\lambda_0)] = R(\lambda_0).$$

Conform teoremei 1, paragraful 1, al doilea factor din partea stîngă a relației precedente are un invers în cercul

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0)\|}$$

anume

$$[e + (\lambda - \lambda_0)\, R(\lambda_0)]^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\ [R(\lambda_0)]^n\,.$$

Deoarece acest invers este funcție olomorfă de λ în cercul considerat, rezultă că $R(\lambda)$ este funcție olomorfă într-o vecinătate a lui λ_0.

Cum λ_0 a fost luat arbitrar în D, funcția $R(\lambda)$ este olomorfă în domeniul D.

Corolar. *Orice soluție a ecuației rezolvante* (1), *definită și uniformă într-o vecinătate a lui λ_0, este de forma*

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\, x^{n+1},$$

unde x este un element din B.

2. Considerăm acum elementele de forma

$$\lambda e - x,$$

unde λ este un număr complex.

Definiția 1. *Fie x un element oarecare al unei algebre normate complete. Mulțimea numerelor complexe λ pentru care există elementul*

$$(\lambda e - x)^{-1}$$

se numește mulțimea rezolvantă a elementului x. Complementara mulțimii rezolvante în mulțimea numerelor complexe se numește spectrul elementului x.

Vom însemna mulțimea rezolvantă a elementului x prin $\rho(x)$, spectrul prin $\sigma(x)$ și

$$(\lambda e - x)^{-1} = R(\lambda; x).$$

Prin definiție avem deci

$$R(\lambda; x)(\lambda e - x) = (\lambda e - x) R(\lambda; x) = e,$$

pentru orice $\lambda \in \rho(x)$.

Definiția 2. *Funcția $R(\lambda; x)$ de variabila complexă λ se numește funcția rezolvantă a elementului x.*

Teorema 2. *Oricare ar fi elementul x al algebrei normate complete, mulțimea sa rezolvantă este deschisă.*

$R(\lambda; x)$ este o funcție olomorfă de λ în fiecare componentă a mulțimii rezolvante.

Demonstrație. Fie $\lambda_0 \in \rho(x)$, $y = \lambda e - x$, $y_0 = \lambda_0 e - x$. Atunci

$$R(\lambda; x) = y^{-1} = [y_0 - (y_0 - y)]^{-1} = y_0^{-1} y_0 [y_0 - (y_0 - y)]^{-1} =$$

$$= y_0^{-1}[(y_0 - (y_0 - y)) y_0^{-1}]^{-1} = y_0^{-1}[e - (y_0 - y) y_0^{-1}]^{-1} =$$

$$= y_0^{-1}\left[e + \sum_{n=1}^{\infty} [(y_0 - y) y_0^{-1}]^n\right] = y_0^{-1} + y_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(y_0 - y) y_0^{-1}]^n =$$

$$= y_0^{-1} + y_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R(\lambda_0; x)]^n,$$

dacă ultima serie este convergentă. Însă această serie este absolut convergentă și definește o funcție de λ în cercul

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\lambda_0; x)\|}.$$

După cum am văzut în teorema 1, aceasta este o funcție olomorfă de λ.

Vom arăta acum o altă proprietate importantă a funcției rezolvante $R(\lambda; x)$.

Teorema 3. *Dacă λ și μ aparțin mulțimii rezolvante $\rho(x)$ a elementului x, atunci*

$$R(\lambda; x) - R(\mu; x) = (\mu - \lambda) R(\lambda; x) R(\mu; x), \tag{2}$$

adică funcția rezolvantă $R(\lambda; x)$ este o soluție a ecuației rezolvante (1).

Demonstrație. Avem

$$R(\lambda;\ x) = R(\lambda;\ x)\ (\mu e - x)\ R(\mu;\ x) =$$
$$= R(\lambda;\ x)\ [\mu e - \lambda e + \lambda e - x]\ R(\lambda;\ x) =$$
$$= R(\lambda;\ x)\ [(\mu - \lambda) e + \lambda e - x]\ R(\lambda;\ x) =$$
$$= (\mu - \lambda)\ R(\lambda;\ x)\ R(\mu;\ x) + R(\lambda;\ x)\ (\lambda e - x)\ R(\mu;\ x) =$$
$$= (\mu - \lambda)\ R(\lambda;\ x)\ R(\mu\ ;\ x) + R(\mu;\ x).$$

Teorema 4. *Orice serie de forma*

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n\ x^{n+1} \tag{3}$$

verifică ecuația rezolvantă (1), *în cercul său de convergență. Funcția* $R(\lambda)$ *definită de această serie este o funcție rezolvantă, dacă și numai dacă* x *este un element inversabil.*

Demonstrație. Rezultă din teorema precedentă, deoarece, în interiorul cercului său de convergență, seria $R(\lambda)$ definește inversul elementului

$$x^{-1}[e + (\lambda - \lambda_0)\ x^{-1}],$$

dacă și numai dacă x^{-1} există.

Definiția 3. *Dacă în expresia* (3), x *este un element singular* (*neinversabil*), *atunci funcția* $R(\lambda)$ *se numește o funcție pseudo-rezolvantă.*

Mulțimea rezolvantă a elementului x, $\rho(x)$, include cel puțin o componentă, aceea a punctului de la infinit, pe care o numim componentă principală.

Funcția rezolvantă are în această componentă o expresie remarcabilă, pe care o vom da în teorema următoare. În prealabil, enunțăm o lemă asupra unor șiruri de numere reale.

Lemă. *Fie* $\{\alpha_n\}$ *un șir de numere reale astfel încît* $\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m + \alpha_n$ $m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$

Atunci există limita

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n}$$

și

$$-\infty \leqslant \alpha < \infty.$$

Teorema 5. *Pentru* $|\lambda| > \gamma$, *unde*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

funcția rezolvantă se exprimă sub forma

$$R(\lambda;\ x) = \lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1}\ x^n\ . \tag{4}$$

Demonstrație. Însemnăm

$$\alpha_n = \log\ \|x^n\|\ .$$

Deoarece

$$\| x^{m+n} \| \leqslant \| x^m \| \cdot \| x^n \|,$$

avem

$$\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_m + \alpha_n,$$

deci, aplicînd lema, există numărul

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \log \| x^n \|^{1/n}.$$

Punem $e^\alpha = \gamma$. Atunci, din teorema 5, paragraful 1, deducem că seria (4) este absolut convergentă pentru $|\lambda| > \gamma$. Înmulțind această serie cu $(\lambda e - x)$, se verifică ușor că ea reprezintă într-adevăr funcția $R(\lambda; x)$.

3. Ecuația rezolvantă poate avea însă și alte soluții în afară de funcțiile rezolvante.

În această privință, răspunsul definitiv ne este dat de

Teorema 6. *Condiția necesară și suficientă ca o soluție $R'(\lambda)$ a ecuației rezolvante (1) să fie funcția rezolvantă a unui element din B pentru $\lambda \in D$ este ca $R(\lambda)$ să fie un element inversabil cel puțin pentru o valoare a lui λ în domeniul D.*

Demonstrație. Condiția este necesară. Într-adevăr, dacă $R(\lambda)$ este funcția rezolvantă $R(\lambda; x)$ a unui element $x \in B$, pentru $\lambda \in D$, atunci $R(\lambda)$ este inversabil pentru orice $\lambda \in \rho(x)$, deci în particular pentru $\lambda \in D$.

Condiția este și suficientă. Presupunem că există elementul $[R(\lambda_0)]^{-1}$ pentru valoarea $\lambda_0 \in D$ și fie

$x = \lambda_0 e - [R(\lambda_0)]^{-1}$. Atunci

$$\lambda e - x = (\lambda - \lambda_0) e + [R(\lambda_0)]^{-1}.$$

Însă $R(\lambda)$ este soluție a ecuației rezolvante, deci

$$(\lambda - \lambda_0) R(\lambda) R(\lambda_0) = R(\lambda_0) - R(\lambda),$$

de unde deducem

$$(\lambda - \lambda_0) R(\lambda) = e - R(\lambda) [R(\lambda_0)]^{-1}$$

adică

$$R(\lambda) [(\lambda - \lambda_0) e + [R(\lambda_0)]^{-1}] = e,$$

de unde rezultă că $R(\lambda)$ este funcția rezolvantă a elementului

$$x = \lambda_0 e - [R(\lambda_0)]^{-1}.$$

4. Soluțiile ecuației rezolvante au următoarele proprietăți

Propoziția 1. *Dacă $R(\lambda)$ este o soluție a ecuației rezolvante, atunci și $R(\lambda + \alpha)$ este o soluție, oricare ar fi numărul complex α, astfel încît $R(\lambda + \alpha)$ să fie definită.*

Demonstrație. Egalitatea

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu)$$

implică

$$R(\lambda+\alpha)-R(\mu+\alpha)=(\mu+\alpha-(\lambda+\alpha))\,R(\lambda+\alpha)\,R(\mu+\alpha)=$$
$$=(\mu-\lambda)\,R(\lambda+\alpha)\,R(\mu+\alpha).$$

Propoziția 2. *Dacă y este un element idempotent în B și este permutabil cu $R(\lambda)$, soluție a ecuației rezolvante, atunci și $yR(\lambda)$ este soluție a ecuației rezolvante.*

Demonstrație. Deoarece $y^2=y$

$$yR(\lambda)-yR(\mu)=(\mu-\lambda)\,yR(\lambda)\,R(\mu)=$$
$$=(\mu-\lambda)\,y^2R(\lambda)\,R(\mu)=(\mu-\lambda)\,yR(\lambda)\,yR(\mu).$$

Propoziția 3. *Dacă $R(\lambda)$ este o soluție a ecuației rezolvante, atunci și funcția*

$$\frac{1}{\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

este o soluție.

Demonstrație. Dezvoltăm expresia

$$A=(\mu-\lambda)\left[\frac{1}{\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right]\left[\frac{1}{\mu}e+\frac{1}{\mu^2}R\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right]$$

și obținem

$$A=(\mu-\lambda)\left[\frac{1}{\lambda\mu}e+\frac{1}{\lambda\mu^2}R\left(-\frac{1}{\mu}\right)+\frac{1}{\lambda^2\mu}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda^2\mu^2}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)R\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right]=$$
$$=\frac{\mu-\lambda}{\lambda^2\mu^2}\left[\lambda\mu e+\lambda R\left(-\frac{1}{\mu}\right)+\mu R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)+R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)R\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right].$$

Însă

$$R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)R\left(-\frac{1}{\mu}\right)=\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\left[R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-R\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right],$$

deoarece $R(\lambda)$ este soluție a ecuației rezolvante.

Deci

$$A=\frac{\mu-\lambda}{\lambda^2\mu^2}\left[\lambda\mu e+\lambda R\left(-\frac{1}{\mu}\right)+\mu R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\lambda\mu}\left[R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-R\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right]=$$
$$=\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}e+\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda^2\mu}+\frac{1}{\lambda\mu}\right)R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)+\left(\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu^2}-\frac{1}{\lambda\mu}\right)R\left(-\frac{1}{\mu}\right)=$$
$$=\frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}e+\frac{1}{\lambda^2}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\mu^2}R\left(-\frac{1}{\mu}\right)=$$
$$=\frac{1}{\lambda}e+\frac{1}{\lambda^2}R\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\mu}e-\frac{1}{\mu^2}R\left(-\frac{1}{\mu}\right).$$

Teorema 7. *Orice soluție a ecuației rezolvante mărginită la exteriorul unui cerc este de forma*

$$R(\lambda) = z + j\,R(\lambda;\ x),$$

unde

$$z^2 = 0,\ j^2 = j,\ z\,j = j\,z = 0,$$

$$x\,j = j\,x = x,$$

$R(\lambda)$ este o funcție cvasi-rezolvantă dacă $z = 0$ și o funcție rezolvantă dacă $z = 0$ și $j = e$.

Demonstrație. Deoarece $R(\lambda)$ este olomorfă pentru orice λ la distanță finită (pentru care este definită) și mărginită la infinit, ea este olomorfă și la infinit. Atunci, în jurul punctului de la infinit, $R(\lambda)$ are forma

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\lambda^{-n}.$$

Înlocuind această expresie în ecuația rezolvantă, obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\lambda^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\mu^{-n} = (\mu - \lambda)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\lambda^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\mu^{-n}\right)$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda^{-n}\,\mu^{-1} + \lambda^{-n+1}\,\mu^{-2} + \ldots + \lambda^{-1}\,\mu^{-n}) =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\lambda^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,\mu^{-n}\right).$$

Dacă dezvoltăm și egalăm coeficienții puterilor egale, găsim următoarele ecuații

$$C_i\,C_j = C_j\,C_i, \qquad (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots),$$

$$C_0^2 = 0,\ C_0\,C_k = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$C_1^2 = C_1,$$

$$C_n = C_{n-j}\,C_{j+1}, \quad (n > 1,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Ultimele ecuații ne arată că

$$C_n = (C_2)^{n-1}, \quad \text{pentru } n > 1.$$

Notînd

$$C_0 = z, \quad C_1 = j, \quad C_2 = x$$

expresia funcției $R(\lambda)$ devine

$$R(\lambda) = z + j\lambda^{-1} + x\lambda^{-2} + x^2\lambda^{-3} + \ldots =$$

$$= z + j\lambda^{-1} + jx\lambda^{-2} + jx^2\lambda^{-3} + \ldots = z + jR(\lambda;\ x)$$

și elementele z, j, x verifică relațiile din teoremă.

Restul teoremei este consecință imediată a teoremelor precedente.

Utilizînd dezvoltarea în serie Laurent a funcției $R(\lambda)$, soluție a ecuației rezolvante, obținem:

Teorema 8. *Fie $R(\lambda)$ o soluție a ecuației rezolvante, olomorfă în coroana circulară*

$$0 \leqslant \gamma_1 < |\lambda| < \gamma_2 \leqslant \infty.$$

Atunci $R(\lambda)$ se descompune sub forma

$$R(\lambda) = R^-(\lambda) + R^+(\lambda)$$

și funcțiile $R^-(\lambda)$, $R^+(\lambda)$ au următoarele proprietăți:

a) $R^-(\lambda)\,R^+(\lambda) = R^+(\lambda)\,R^-(\lambda) = 0$;

b) $R^-(\lambda)$ *și* $R^+(\lambda)$ *sînt soluții ale ecuației rezolvante;*

c) $R^-(\lambda)$ *este olomorfă pentru* $|\lambda| > \gamma_1$ *și este de forma*

$$R^-(\lambda) = jR(\lambda;\ x^-),$$

unde

$$j^2 = j \quad \text{și} \quad x^- j = jx^- = x^-.$$

Dacă $\gamma_1 = 0$, elementul x^- este cvasi-nilpotent;

d) $R^+(\lambda)$ este olomorfă pentru $|\lambda| < \gamma_2$ și este de forma

$$R^+(\lambda) = \sum_{n=0} (-\lambda)^n x_0^{n+1},$$

unde

$$x_0(e-j) = (e-j)\,x_0 = x_0.$$

Demonstrație. Fie

$$R(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \lambda^n$$

dezvoltarea în serie Laurent a funcției $R(\lambda)$.

Înlocuind în ecuația rezolvantă, avem

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} = -\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} C_k\, C_m\, \lambda^k\, \mu^m,$$

coeficienții elementelor C_n din stînga egalității fiind

$$\begin{cases} \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\mu + \ldots + \mu^{n-1}, & \text{dacă } n \geqslant 1, \\ 0, & \text{dacă } n = 0, \\ -(\lambda^n \mu^{-1} + \lambda^{n+1}\mu^{-2} + \ldots + \lambda^{-1}\mu^n), & \text{dacă } n < 0. \end{cases}$$

Determinînd coeficienții produselor $\lambda^k \mu^m$ și $\lambda^m \mu^k$ în partea stîngă a egalității de mai sus, se vede că sînt aceiași, deci pentru orice k și m avem

$$C_k\, C_m = C_m\, C_k.$$

Observăm acum că în partea stîngă a egalității nu sînt termeni de forma λ^n sau μ^n cu n negativ, nici termeni de forma $\lambda^k \mu^m$ cu k și m de semne diferite.

De aici deducem

$$C_k C_m = 0,$$

pentru orice $k \geqslant 0$ și $m \leqslant -1$.

Atunci, dacă definim funcțiile $R^+(\lambda)$ și $R^-(\lambda)$ prin

$$R^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^n, \quad R^-(\lambda) = \sum_{-\infty}^{-1} C_n \lambda^n,$$

avem

$$R(\lambda) = R^+(\lambda) + R^-(\lambda)$$

și se verifică imediat proprietatea *a*).

Să verificăm proprietatea *b*) pentru $R^+(\lambda)$:

$$(\mu - \lambda) R^+(\lambda) R^+(\mu) = (\mu - \lambda)\left(\sum_0^{\infty} C_n \lambda^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \lambda^n\right) =$$

$$= (\mu - \lambda)\left(-\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} C_k C_m \lambda^k \mu^m\right) =$$

$$= (\mu - \lambda) \sum_0^{\infty} C_n (\lambda^{n-1} + \mu\lambda^{n-2} + \ldots + \mu^{n-1}) =$$

$$= \sum_0^{\infty} C_n (\lambda^n - \mu^n) = R^+(\lambda) - R^+(\mu).$$

Proprietatea *b*) pentru $R^-(\lambda)$ se verifică în mod analog, ținînd seama și de relația de ortogonalitate.

Proprietatea *c*): $R^-(\lambda)$ este olomorfă la infinit și ia valoarea 0, deci după teorema precedentă,

$$R^-(\lambda) = jR(\lambda; x^-),$$

unde

$$x^- j = jx^- = x^-$$

și

$$j^2 = j = C_{-1}.$$

Seria care definește pe $R(\lambda; x^-)$ converge pentru $|\lambda| > \gamma_1$ și dacă $\gamma_1 = 0$,

$$\lim \| (x^-)^n \|^{1/n} = 0,$$

deci x^- este cvasi-nilpotent.

Proprietatea *d*): $R^+(\lambda)$ fiind olomorfă pentru $\lambda = 0$, este de forma

$$R^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n x_0^{n+1},$$

unde $x_0 = C_0$.

Ținînd seamă de relația de ortogonalitate, avem

$$x_0 j = j x_0 = 0,$$

de unde deducem

$$(e - j)\, x_0 = x_0\, (e - j) = x_0.$$

Teorema este demonstrată.

Dacă $R(\lambda)$ este o funcție rezolvantă, teorema este valabilă și, mai mult, avem:

Teorema 9. *Cu aceleași notații ca în teorema* 8 *dacă* $R(\lambda)$ *este o funcție rezolvantă,*

$$R(\lambda) = R(\lambda;\ x),$$

atunci

$$x = x^+ + x^-,$$

unde

$$x^- = jx, \quad x^+ = (e - j)\, x,$$
$$-x_0 x^+ = e - j$$

și

$$[(e - j)\, \lambda - x^+]\, R^+(\lambda) = e - j$$
$$(j\lambda - x^-)\, R^-(\lambda) = j.$$

§ 3. Algebra Banach a operatorilor definiți pe un spațiu Banach

Fie B un spațiu Banach. Mulțimea operatorilor definiți pe B (și cu valori în B) se poate organiza ca algebră Banach cu operațiile

$$T_1 + T_2, \quad aT, \quad T_1 T_2$$

definite de relațiile

$$(T_1 + T_2)\, (x) = T_1 (x) + T_2 (x), \quad \text{pentru orice } x \in B,$$
$$(aT)\, (x) = aT\, (x), \quad , \quad \text{pentru orice } x \in B,$$
$$(T_1 T_2)\, (x) = T_1\, (T_2\, (x)), \quad , \quad \text{pentru orice } x \in B,$$

și cu norma obișnuită a operatorilor

$$\| T \| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ x \in B}} \| T(x) \|.$$

Vom nota această algebră prin $\mathfrak{L}(B)$.

Faptul că $\mathfrak{L}(B)$ este un spațiu Banach a fost arătat la capitolul IV, paragraful 1, deoarece $\mathfrak{L}(B)$ este de forma $\mathfrak{L}(E, B)$, unde E coincide cu B.

Proprietățile

$$(aT_1)\, (bT_2) = (ab)\, (T_1 T_2)$$

și

$$\| T_1\, T_2 \| \leqslant \| T_1 \| \, \| T_2 \|,$$

impuse algebrelor vectoriale normate, sînt evidente.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Algebrele normate se mai numesc în literatură, inele normate. Primul studiu, din punct de vedere abstract, al lor, a fost făcut de M. Nagumo [213], care le-a numit inele liniare metrice.

Cele mai importante realizări aparțin matematicienilor sovietici I. M. Ghelfand [103], D. A. Raikov, G. E. Silov, A. N. Kolmogorov etc. [104], [105], [106], care, pe lîngă metodele analitice studiate, în parte, în acest capitol, au introdus, în mod hotărîtor, metodele algebrice și algebrico-topologice.

Metodele analitice au fost studiate și de A. Taylor, R. Lorch, N. Dunford, E. Hille etc. și sînt expuse în cartea [13]. Majoritatea teoremelor din acest capitol sînt redate după [13].

2. Studiul general al algebrelor normate, care este o creație aproape exclusivă a cercetătorilor sovietici, în frunte cu I. M. Ghelfand, constituie în actuala fază a dezvoltării analizei funcționale, unul din cele mai importante capitole ale ei. Se înțelege că acest studiu depășește cadrul volumului de față.

CAPITOLUL VIII

OPERAŢII COMPLET CONTINUE ŞI RELATIV COMPLET CONTINUE

Dintre operaţiile liniare se disting, prin proprietăţile lor deosebite, operaţiile complet continue, care păstrează următoarea proprietate esenţială a transformărilor liniare dintr-un spaţiu cu un număr finit de dimensiuni : transformă orice mulţime mărginită într-o mulţime relativ compactă.

Operatorilor complet continui li se aplică toate metodele analitice studiate în capitolele anterioare. Totodată studiul ecuaţiilor liniare cu operatori continui se poate face prin metodele indicate la capitolul V.

Operaţiile relativ complet continue constituie o generalizare a operaţiilor complet continue în sensul următor : ele transformă o mulţime mărginită într-o mulţime compactă faţă de altă normă, în general neechivalentă topologic cu prima.

Multe din proprietăţile operaţiilor complet continue se păstrează şi la cele relativ complet continue.

În acest capitol studiem proprietăţile generale ale operaţiilor complet continue, operatorii complet continui pozitivi în spaţiile Banach ordonate, proprietăţile generale ale operaţiilor relativ complet continue şi clase speciale de operaţii relativ complet continue.

§ 1. Operaţii complet continue

Definiţie. *O operaţie liniară definită pe un spaţiu Banach B şi cu valori într-un spaţiu Banach B', se numeşte complet continuă, dacă transformă orice mulţime mărginită în B într-o mulţime relativ compactă în B'.*

Teorema 1. *Contradomeniul unei operaţii complet continue este un spaţiu liniar cu bază numărabilă.*

Demonstraţie. Fie T o operaţie complet continuă.

Sfera $\overline{S}_n = \{x \mid \| x \| \leqslant n\}$ fiind o mulţime mărginită, se transformă prin T într-o mulţime relativ compactă, deci $T(\overline{S}_n)$ considerat ca subspaţiu în B' are o bază numărabilă.

Deoarece $T(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(\overline{S}_n)$, rezultă că şi $T(B)$ are o bază numărabilă.

Teorema 2. *Fie $\{T_n\}$ un șir de operații liniare complet continue convergent în normă către operația liniară T, adică astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n - T \| = 0.$$

Atunci operația T este complet continuă.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că orice șir mărginit de elemente din B, se transformă într-un șir relativ compact.

Fie deci $\{x_i\}$ un șir mărginit, $x_i \in B$.

Prin procedeul diagonalei se poate extrage un subșir $\{y_i\}$, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} T_n(y_i)$$

există pentru orice $i = 1, 2, \ldots$

Avem atunci

$$\| T(y_p) - T(y_q) \| \leqslant \| T(y_p) - T_n(y_p) \| + \| T_n(y_p) - T_n(y_q) \| + \| T_n(y_q) - T(y_q) \|,$$

deci

$$\| (T(y_p) - T(y_q) \| \leqslant \| T - T_n \| (\| y_p \| + \| y_q \|) + \| T_n(y_p - y_q) \|.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$, astfel ca

$$\| T - T_{n_0} \| (\| y_p \| + \| y_q \|) \leqslant \varepsilon,$$

independent de p și q, deoarece șirul $\{\| y_p \|\}$ este mărginit. De altă parte, există $p_0(\varepsilon)$, astfel că pentru $p, q \geqslant p_0(\varepsilon)$,

$$\| T_{n_0}(y_p) - T_{n_0}(y_q) \| < \varepsilon,$$

deci, pentru $p, q \geqslant p_0(\varepsilon)$,

$$\| T(y_p) - T(y_q) \| < 2\varepsilon.$$

Prin urmare șirul $\{T(y_p)\}$ este un șir Cauchy.

Spațiul B' fiind complet, rezultă că șirul $\{T(x_i)\}$ este relativ compact și teorema este demonstrată.

Teorema 3. *Operația liniară T este complet continuă dacă și numai dacă operația T^* este complet continuă.*

Demonstrație. *a*) Presupunem că T este complet continuă și T^* nu este. *Fie* $\{g_n\}$ un șir de funcționale inclus în B'^* și astfel că

$$\| g_n \| \leqslant 1 \quad \text{și} \quad \| T^*(g_m) - T^*(g_n) \| > \delta > 0, \quad (m \neq n).$$

Deoarece $T(B)$ are o bază numărabilă, există un șir finit de puncte $\{x_i\} \subset B$ $(i = 1, \ldots, p,)$ astfel încît

$$\| x_i \| \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, p) \quad \text{și} \quad \min_{1\leqslant i\leqslant p} \| T(x_i) - T(x) \| < \frac{\delta}{3},$$

pentru orice $x \in B$ cu $\| x \| \leqslant 1$.

Pentru orice i $(i=1, \ldots, p)$, mulțimea numerelor $g_n(y_i)$ $(n=1, 2, \ldots)$, unde

$$y_i = T(x_i),$$

este mărginită. Există atunci un subșir $\{g_n'\} \subset \{g_n\}$ astfel că

$$\| g_m'(y_i) - g_n'(y_i) \| < \frac{\delta}{3} \quad (i = 1, \ldots, p).$$

Deci, dacă $\| x \| \leqslant 1$ și $y = T(x)$, există un i, astfel încît

$$\| g_m'(y) - g_n'(y) \| \leqslant \| g_m'(y) - g_m'(y_i) \| +$$
$$+ \| g_m'(y_i) - g_n'(y_i) \| + \| g_n'(y_i) - g_n'(y) \| \leqslant \delta,$$

de unde rezultă

$$| \langle x, T^*(g_m') \rangle - \langle x, T^*(g_n') \rangle | \leqslant \delta,$$

adică

$$| \langle x, T^*(g_m') - T^*(g_n') \rangle | \leqslant \delta.$$

De aici deducem

$$\| T^*(g_m') - T^*(g_n') \| \leqslant \delta,$$

ceea ce contrazice definiția șirului $\{g_n\}$.

Am arătat astfel că dacă T este operație liniară complet continuă, atunci și T^* este complet continuă.

b) Presupunem acum că T^* este complet continuă. Atunci T^{**} este complet continuă în baza punctului *a*), deci și T, care este restricția operației T^{**} la B, este complet continuă.

§ 2. Operatori complet continui

Teoria operatorilor complet continui constituie unul din capitolele cele mai importante ale spațiilor Banach, datorită proprietăților speciale ale acestor operatori.

În acest capitol vom trata despre operații liniare ale unui spațiu Banach B în el însuși.

Se întrebuințează, pentru acest fel de operații liniare, termenul de operator.

Definiție. *Un operator în spațiul Banach B se numește complet continuu, dacă transformă orice mulțime mărginită într-o mulțime relativ compactă.*

Teorema 1. *Dacă operatorul T este complet continuu, atunci operatorul $I - T$ transformă orice mulțime mărginită și închisă într-o mulțime închisă.*

Demonstrație. Fie F o mulțime mărginită și închisă în B și $\{x_n\}$ un șir inclus în F, astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - T(x_n)) = y_0 \in B.$$

Vom arăta că y_0 este de forma $T(z_0)$ cu $z_0 \in F$.

Șirul $\{T(x_n)\}$ este relativ compact, deci există un subșir $\{T(x_{n_i})\}$ convergent către un element $x_0 \in B$.

Dacă notăm $V = I - T$, avem

$$x_{n_i} = V(x_{n_i}) + T(x_{n_i})$$

de unde rezultă

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \lim_{i\to\infty} V(x_{n_i}) + \lim_{i\to\infty} T(x_{n_i}) = y_0 + x_0.$$

Operatorul V fiind continuu, avem

$$\lim_{i\to\infty} V(x_{n_i}) = V(y_0 + x_0),$$

deci

$$y_0 = V(y_0 + x_0).$$

Însă elementul $y_0 + x_0 \in F$ pentru că este limita unui şir inclus în F. Teorema este astfel demonstrată.

T e o r e m a 2. *Dacă operatorul T este total continuu, contradomeniile operatorilor*

$$V = I - T \quad \text{şi} \quad V^* = I - T^*$$

sînt închise.

D e m o n s t r a ţ i e. Fie $y_0 \neq 0$ un punct din mulţimea $V(B)$. Există deci un şir $\{x_n\} \subset B$, astfel încît $\lim_{n\to\infty} V(x_n) = y_0$.

Dacă şirul $\{\| x_n \|\}$ este mărginit, elementul y_0 aparţine mulţimii $V(B)$ datorită teoremei precedente.

Dacă şirul $\{\| x_n \|\}$ nu este mărginit, vom nota cu d_n distanţa între x_n şi mulţimea $V^{-1}(0)$ (mulţimea punctelor din B pentru care $V(x) = 0$). Există atunci pentru fiecare $n = 1, 2, \ldots$, un element $v_n \in V^{-1}(0)$, astfel încît

$$d_n \leqslant \| x_n - v_n \| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n.$$

Avem

$$\lim_{n\to\infty} V(x_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} V(x_n) = y_0.$$

Acum iarăşi se prezintă două posibilităţi.

Dacă şirul $\{x_n - v_n\}$ este mărginit, y_0 aparţine mulţimii $V(B)$ datorită teoremei precedente.

Dacă şirul $\{x_n - v_n\}$ nu este mărginit, putem presupune

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - v_n \| = \infty.$$

Notînd

$$z_n = \frac{x_n - v_n}{\| x_n - v_n \|},$$

avem $\| z_n \| = 1$ şi

$$\lim_{n\to\infty} V(z_n) = 0.$$

Şirul $\{z_n\}$ fiind mărginit, se poate extrage, în baza teoremei precedente, un subşir $\{z_{n_i}\}$ convergent către un element v_0, astfel încît $V(v_0) = 0$.

Fie $z_n - v_0 = u_n$. Atunci

$$\frac{x_n - v_n}{\| x_n - v_n \|} - v_0 = u_n,$$

de unde deducem

$$x_n - v_n - \| x_n - v_n \| \cdot v_0 = \| x_n - v_n \| \cdot u_n$$

și

$$\| x_{n_i} - v_{n_i} - \| x_{n_i} - v_{n_i} \| v_0 \| = \| x_{n_i} - v_{n_i} \| \cdot \| u_{n_i} \| \leqslant$$

$$\leqslant \| u_{n_i} \| \left(1 + \frac{1}{n_i} \right) d_{n_i}.$$

Însă

$$\lim_{n_i \to \infty} u_{n_i} = 0,$$

deci există un șir $\{n_i\}$ astfel încît

$$\| x_{n_i} - v_{n_i} - \| x_{n_i} - v_{n_i} \| \cdot v_0 \| \leqslant \frac{d_{n_i}}{2}.$$

Acest lucru este în contradicție cu faptul că elementul $v_{n_i} + \| x_{n_i} - v_{n_i} \| v_0$ aparține mulțimii $V^{-1}(0)$ și d_{n_i} este distanța între elementul x_{n_i} și mulțimea $V^{-1}(0)$.

Deci ipoteza că șirul $\{\| x_n - v_n \|\}$ nu este mărginit ne duce la o contradicție și astfel teorema este complet demonstrată, pentru primul operator, $V = I - T$.

Pentru operatorul $V^* = I - T^*$ demonstrația este aceeași însă în spațiul B^*, deoarece operatorul T^* este complet continuu în acest spațiu.

T e o r e m a 3. *Dacă operatorul liniar T este complet continuu, atunci fiecare din ecuațiile*

$$(I - T)(x) = 0 \quad \text{și} \quad (I - T^*)(f) = 0,$$

admite cel mult un număr finit de soluții liniar independente.

D e m o n s t r a ț i e. Este suficient să dăm demonstrația numai pentru prima ecuație.

Fie M o mulțime mărginită din $V^{-1}(0)$. Avem $M = T(M)$, deci M este relativ compactă.

Teorema este demonstrată.

Teorema este adevărată și pentru ecuația $V^n(x) = 0$, pentru că $V^n = I - TA$, unde TA este complet continuu.

T e o r e m a 4. *Fie T un operator liniar complet continuu în spațiul Banach B și $V = I - T$. Spațiile $V^{-1}(0)$, $B/V(B)$, $V^{*-1}(0)$, $B^*/V^*(B^*)$ au același număr (finit) de dimensiuni.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie m numărul de dimensiuni al spațiului $V^{-1}(0)$ și n numărul de dimensiuni al spațiului $V^{*-1}(0)$.

Datorită teoremei 2 și teoremei 9, capitolul V, paragraful 3, operația V este deschisă. Aplicînd însă teorema 11, capitolul V, paragraful 3, deducem că spațiul $B/V(B)$ are n dimensiuni, iar spațiul $B^*/V^*(B^*)$ are m dimensiuni.

Notăm $A_1 = V^{-1}(0)$, $A_{p+1} = V^{-1}(A_p)$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Spațiile $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ sînt de dimensiuni finite și avem relațiile

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_p \subset A_{p+1} \subset \ldots$$

Vom arăta că există un indice k astfel încît $A_k = A_{k+1} = \ldots$

Presupunem contrariul, anume că $A_p \neq A_{p+1}$ pentru orice indice p. Atunci există un șir de elemente $\{x_p\} \subset B$ astfel ca

$$\| x_p \| = 1, \; x_p \in A_p$$

și

$$\| x_p - y \| > \frac{1}{2}, \text{ pentru orice } y \in A_{p-1}.$$

Pentru $p > q > 1$, avem

$$\| T(x_p) - T(x_q) \| = \| x_p - (x_q + V(x_q) - V(x_p)) \|.$$

Însă elementul

$$x_q + V(x_q) - V(x_p)$$

aparține spațiului A_{p-1}, pentru că fiecare termen aparține lui A_{p-1}, deci

$$\| T(x_p) - T(x_q) \| > \frac{1}{2}.$$

Aceasta înseamnă că șirul $\{T(x_p)\}$ nu poate fi relativ compact, ceea ce contrazice faptul că șirul $\{x_p\}$ este mărginit și operatorul T complet continuu.

Deducem de aici că există un indice k pentru care

$$A_{k+1} = A_k.$$

Pentru indicii superiori avem

$$A_{k+2} = V^{-1}(A_{k+1}) = V^{-1}(A_k) = A_{k+1}$$

ș.a.m.d.

Fie acum r numărul de dimensiuni al spațiului A_k și $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ o bază algebrică a spațiului $V^{-1}(0)$. Există atunci o bază algebrică $\{a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_r\}$ a spațiului A_k. Deoarece $V(a_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, elementelor $V(a_{m+1}), \ldots, V(a_r)$ le corespund s elemente $b_1, \ldots, b_s$ $(s \leqslant r - m)$, care constituie o bază a spațiului $V(A_k)$.

Însă $V(A_k) = A_{k-1} \subset A_k$, deci există $r - s$ elemente $c_1, \ldots, c_{r-s} \in A_k$, astfel că elementele $b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_{r-s}$ constituie o bază algebrică a spațiului A_k.

Dacă $\lambda_j \neq 0 (j = 1, 2, \ldots, r - s)$ sînt numere din corpul K, atunci elementul $\sum_{j=1}^{r-s} \lambda_j c_j$ nu aparține spațiului $V(A_k)$, deci, întrucît $V^{-1}(A_k) = A_k$, elementul $\sum_{j=1}^{r-s} \lambda_j c_j$ nu aparține spațiului $V(B)$.

Aceasta înseamnă că spațiul $B/V(B)$ are numărul de dimensiuni cel puțin egal cu $r - s \geqslant m$, adică $n \geqslant m$.

Analog demonstrăm că $n \leqslant m$, deci în definitiv, $n = m$, și teorema este demonstrată.

Un caz important este acela în care numărul de dimensiuni al spațiului $V^{-1}(0)$ este 0, adică spațiul $V^{-1}(0)$ este compus numai din elementul 0. Datorită teoremei precedente, în acest caz și spațiul $B/V(B)$ este compus dintr-un singur element, ceea ce înseamnă că $B = V(B)$ și invers.

Cu alte cuvinte, putem enunța:

Teorema 5. *Fie T un operator complet continuu în spațiul Banach B. Condiția necesară și suficientă pentru ca operatorul $V = I - T$ să admită un invers continuu definit pe B este ca ecuația $V(x) = 0$ să admită o singură soluție, $x = 0$.*

§ 3. Algebra Banach a operatorilor complet continui

1. Pentru studiul structurii operatorilor complet continui se folosesc noțiunile introduse în capitolul VII.

Mulțimea operatorilor complet continui definiți pe un spațiu Banach B se poate considera ca submulțime în algebra Banach a endomorfismelor spațiului B. Vom vedea că se obține astfel o subalgebră Banach, însă fără element unitate. Adjungînd acestei algebre și operatorul identitate — procedeul este general — se obține o algebră Banach cu element unitate, ale cărei elemente sînt de forma $aI + T$, unde a parcurge mulțimea numerelor complexe, I este operatorul identitate și T parcurge mulțimea operatorilor complet continui.

Această ultimă algebră constituie studiul paragrafului de față. Menționăm că spațiile Banach considerate în acest paragraf sînt complexe.

Definiția 1. *Vom nota cu $\mathfrak{C}(B)$ mulțimea operatorilor de forma $aI + T$ definiți de spațiul Banach complex B.*

Următoarele propoziții ne arată că $\mathfrak{C}(B)$ este o algebră Banach cu element unitate.

Propoziția 1. *Dacă operatorii V_1, V_2 aparțin mulțimii $\mathfrak{C}(B)$, atunci și operatorul $a V_1 + b V_2$ aparține mulțimii $\mathfrak{C}(B)$.*

Demonstrație. Fie

$$V_1 = a_1 I + T_1, \quad V_2 = a_2 I + T_2.$$

Atunci

$$V_1 + V_2 = (a_1 + a_2) I + (T_1 + T_2).$$

Este ușor de văzut că $T_1 + T_2$ este un operator complet continuu. Într-adevăr fie M o mulțime mărginită inclusă în B și $\{x_n\}$ un șir de elemente din M. Deoarece T_1 este complet continuu, din șirul $\{T_1(x_n)\}$ se poate extrage un șir parțial $\{T_1(x_n')\}$ convergent.

Analog din șirul $\{T_2(x_n')\}$ se poate extrage un subșir $\{T_2(x_n'')\}$, convergent. Atunci șirul $\{T_1(x_n'') + T_2(x_n'')\} = \{(T_1 + T_2)(x_n'')\}$ este convergent. Rezultă că mulțimea $(T_1 + T_2)(M)$ este relativ compactă, deci $T_1 + T_2$ este un operator complet continuu, de unde

$$V_1 + V_2 \in \mathfrak{C}(B).$$

Propoziția 2. *Dacă V_1, $V_2 \in \mathfrak{C}(B)$, atunci și $V_1 V_2 \in \mathfrak{C}(B)$.*

Demonstrație. Cu notațiile de mai sus,

$$V_1 V_2 = (a_1 I + T_1)(a_2 I + T_2) = a_1 a_2 I + a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_1 T_2.$$

Operatorul T_1T_2 este evident complet continuu, deci, ținînd seamă de demonstrația precedentă, propoziția 2 este evidentă.

P r o p o z i ț i a 3. *Dacă* $V \in \mathfrak{C}(B)$ *și dacă există* V^{-1}, *atunci și* $V^{-1} \in \mathfrak{C}(B)$.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $V = aI + T$ și $V^{-1} = \frac{1}{a} I + T_1$. Atunci

$$(aI + T)\left(\frac{1}{a} I + T_1\right) = I,$$

adică

$$I + \frac{1}{a} T + aT_1 + TT_1 = I,$$

de unde deducem

$$T_1 = -\frac{1}{a^2} T - \frac{1}{a} TT_1.$$

Deoarece operatorul TT_1 este evident complet continuu, deducem că și T_1 este complet continuu, deci într-adevăr $V^{-1} \in \mathfrak{C}(B)$.

Norma în $\mathfrak{C}(B)$ se definește la fel ca în algebra endomorfismelor $\mathfrak{L}(B)$ și avem, evident,

$$\| V_1V_2 \| \leqslant \| V_1 \| \cdot \| V_2 \|.$$

Mai rămîne să demonstrăm

P r o p o z i ț i a 4. *Algebra vectorială normată* $\mathfrak{C}(B)$ *este completă.*

D e m o n s t r a ț i e. Deoarece $\mathfrak{L}(B)$ este completă, trebuie să arătăm doar că limita unui șir de elemente din $\mathfrak{C}(B)$ aparține tot algebrei $\mathfrak{C}(B)$. Însă acest lucru a fost demonstrat în teorema 2.

2. În capitolul VII am definit valorile spectrale ale unui element x dintr-o algebră Banach, ca fiind numerele complexe λ pentru care elementul $\lambda e - x$ are un invers $(\lambda e - x)^{-1} = R(\lambda; x)$.

Un operator complet continuu T aparține algebrei Banach $\mathfrak{C}(B)$, deci pentru el este valabilă această definiție.

Vom introduce acum o altă definiție folosită în teoria operatorilor liniari.

D e f i n i ț i a 2. *Fie* T *un operator liniar definit pe spațiul vectorial complex* E *și* I *operatorul identitate al acestui spațiu. Numărul complex* λ *se numește valoare proprie a operatorului* T, *dacă există în* E *cel puțin un element* $x \neq 0$, *astfel încît*

$$\lambda x - T(x) = 0$$

sau, ceea ce este același lucru, dacă ecuația

$$(\lambda I - T)(x) = 0 \qquad (1)$$

are cel puțin o soluție diferită de elementul 0.

Soluțiile ecuației (1) *diferite de* 0 *se numesc elementele proprii operatorului* T, *corespunzătoare valorii proprii* λ.

Pentru operatorii complet continui, definiția valorilor spectrale este echivalentă cu definiția valorilor proprii, cum se vede din:

T e o r e m a 1. *Fie* T *un operator complet continuu definit pe spațiul Banach* B. *Condiția necesară și suficientă pentru ca numărul complex* λ

să fie valoare proprie a operatorului T în sensul definiției 2 este ca λ să fie valoarea spectrală a operatorului T, considerat ca element în algebra Banach $\mathcal{C}(B)$.

Demonstrație. Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația

$$(\lambda I - T)(x) = 0, \quad \lambda \neq 0$$

să aibă o soluție $x \neq 0$, este ca ecuația

$$\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)(x) = 0$$

să aibă acea soluție.

De asemenea, condiția necesară și suficientă ca operatorul $(\lambda I - T)$ să aibă un invers, este ca operatorul $\left(I - \frac{1}{\lambda} T\right)$ să aibă un invers.

Atunci teorema noastră rezultă din teorema 5, paragraful 2.

Aplicînd rezultatele din capitolul VII, deducem că mulțimea valorilor proprii ale unui operator liniar este închisă. Pentru operatorii complet continui putem arăta mai mult, anume că este o mulțime izolată.

Pentru aceasta demonstrăm mai întîi următoarea:

Lemă. *Dacă $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ este un sistem finit de valori proprii ale unui operator liniar, atunci, oricare ar fi alegerea elementelor proprii $x(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ corespunzătoare valorilor proprii λ_i $(i = 1, \ldots, k)$, sistemul format de aceste elemente proprii este liniar independent.*

Demonstrație. Vom demonstra lema prin inducție completă. Presupunem că sistemul $\{x(\lambda_1), \ldots, x(\lambda_j)\}$ este liniar independent și fie

$$x(\lambda_{j+1}) = a_1 x(\lambda_1) + \ldots + a_j x(\lambda_j).$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{j} a_i (\lambda_{j+1} - \lambda_i)\, x(\lambda_i) = \lambda_{j+1}\, x(\lambda_{j+1}) - \sum_{i=1}^{j} a_i \lambda_i\, x(\lambda_i) =$$

$$= T(x(\lambda_{j+1})) - \sum_{i=1}^{j} a_i\, T(x(\lambda_i)) =$$

$$= T(x(\lambda_{j+1})) - T\left(\sum_{i=1}^{j} a_i x_i(\lambda_i)\right) = T(0) = 0,$$

ceea ce înseamnă că sistemul $\{x(\lambda_1), \ldots, x(\lambda_j)\}$ nu este liniar independent, deci o contradicție și lema este demonstrată.

Teorema 2. *Valorile proprii ale unui operator complet continuu nu au nici un punct de acumulare în planul complex, afară de 0.*

Demonstrație. Observăm mai întîi că dacă $\lambda \neq 0$ este o valoare proprie a operatorului T, atunci și $\mu = \frac{1}{\lambda}$ este o valoare proprie și reciproc.

Vom arăta deci că inversele valorilor proprii, adică numerele μ, pentru care ecuația

$$x - \mu T(x) = 0$$

are soluții diferite de 0, nu au nici un punct de acumulare finit.

Presupunem contrariul, deci existența unui șir infinit de valori $\{\mu_n\}$ convergent. Fie $\{x_n\}$ un șir corespunzător de valori proprii, astfel ca

$$x_n - \mu_n T(x_n) = 0.$$

Însemnăm prin E_n subspațiul liniar generat de elementele liniar independente $x_1, \ldots, x_n$ (propoziția 1). Evident că E_n este un subspațiu propriu al lui E_{n+1}. De asemenea pentru orice $y \in E_n$,

$$y - \mu_n T(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \mu_n \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\mu_n}{\mu_i} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(1 - \frac{\mu_n}{\mu_i}\right) x_i,$$

deci

$$y - \mu_n T(y) \in E_{n-1}.$$

Există un șir $\{y_n\}$ astfel încît

$$y_n \in E_n \cap \complement E_{n-1}, \quad \|y_n\| = 1$$

și

$$\|y_n - x\| > \frac{1}{2}, \text{ pentru } x \in E_{n-1}.$$

Șirul $\{\mu_n T(y_n)\} = \{T(\mu_n y_n)\}$ este relativ compact.
De altă parte însă

$$T(\mu_n y_n) - T(\mu_m y_m) = y_n - [y_n - \mu_n T(y_n) + T(\mu_m y_m)],$$

deci

$$\|T(\mu_n y_n) - T(\mu_m y_m)\| > \frac{1}{2},$$

pentru că

$$\|y_n - \mu_n T(y_n) + T(\mu_m y_m)\| \in E_{n-1}.$$

Rezultă că șirul $\{T(\mu_n y_n)\}$ nu poate fi relativ compact și am ajuns la o contradicție.
Teorema este demonstrată.
Aplicînd teorema 5 din capitolul VIII, paragraful 1, putem determina precis domeniul în care există valori spectrale ale operatorului complet continuu.
Teorema 3. *Mulțimea spectrală a unui operator complet continuu T este inclusă în cercul $|\lambda| \leqslant \gamma$, unde*

$$\gamma = \limsup_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

3. Notăm, conform notațiilor de la capitolul VII,

$$(\lambda I - T)^{-1} = R(\lambda; T).$$

Dacă T este un operator complet continuu, funcția $R(\lambda; T)$, este definită pentru orice λ complex care nu este valoare proprie a operatorului T și are valorile în $\mathcal{C}(B)$.

Funcția $R(\lambda; T)$ este olomorfă în orice domeniu care nu conține valori proprii ale operatorului T și se poate dezvolta în serie Laurent în jurul oricărei valori proprii.

Definiția 3. *Dacă T este un operator complet continuu, numim funcție pseudo-rezolvantă a operatorului T, funcția $R(\lambda; T)$.*

Teorema 4. *Funcția pseudo-rezolvantă $R(\lambda, T)$ a unui operator complet continuu este meromorfă.*

Demonstrație. Fie λ_0 o valoare proprie a operatorului T și

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n C_n$$

dezvoltarea în serie Laurent a funcției $R(\lambda; T)$ în jurul punctului λ_0. Sîntem în condițiile teoremei 8 din capitolul VII, paragraful 2, deci

$$R(\lambda; T) = R^-(\lambda; T) + R^+(\lambda; T),$$

unde

$$R^-(\lambda; T) = \sum_{-\infty}^{-1} C_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

are proprietatea *c*) din acea teoremă.

Ținînd seamă și de teorema 7 din capitolul VII, paragraful 2, reținem relațiile

$$\begin{aligned} C_{-1}^2 &= C_{-1}, && (n > 1) \\ C_{-n} &= C_{-n+j} C_{-j-1}, && (j = 0, 1, \ldots, n-1) \\ C_{-(n+1)} &= (C_{-2})^n, && (n > 1). \end{aligned}$$

Operatorul C_{-1} se poate exprima sub forma

$$C_{-1} = \int_\Gamma \frac{1}{\lambda - \lambda_0} R(\lambda; T)\, d\lambda$$

cu Γ convenabil aleasă, deci este complet continuu, întrucît $R(\lambda; T)$ este complet continuă pentru orice λ aparținînd curbei Γ.

Fie B_0 imaginea spațiului B prin operatorul C_{-1},

$$B_0 = C_{-1}(B).$$

Relația $C_{-1}^2 = C_{-1}$ ne dă

$$C_{-1}(B_0) = C_{-1}^2(B) = C_{-1}(B) = B_0.$$

Atunci orice mulțime mărginită în B_0 este relativ compactă, deci B_0 are un număr finit de dimensiuni.

Deoarece $C_{-n} = C_{-n} C_{-1} = C_{-1} C_{-n}$, rezultă

$$C_{-n}(B) = B_0.$$

Ținînd seamă și de egalitatea $C_{-(n+1)} = C_{-2}^n$, avem

$$C_{-(n+1)} = C_{-2}^n = C_{-2}^n C_{-1} = D^n C_{-1},$$

unde prin D notăm restricția operatorului C_{-2} la spațiul B_0.

Atunci putem scrie

$$R_\lambda^-(\lambda;\ T) = \left[I_0 + \sum_{n-1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)\, D^n\right] (\lambda - \lambda_0)\, C_{-1},$$

unde I_0 este operatorul identitate în spațiul B_0.

Spațiul B_0 avînd un număr finit de dimensiuni, operatorul D se poate pune sub forma unei matrice pătrate

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{j-1\,j-1} & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

Pentru ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n D^n$ să fie convergentă pentru $|\lambda - \lambda_0| > 0$, este necesar ca

$$a_{11} = a_{22} = \dots = a_{jj} = 0.$$

Prin urmare, pentru $n \geqslant j$, avem

$$D^n = 0.$$

Rezultă că pentru $n > j$, $C_{-n} = 0$, deci funcția $R(\lambda;\ T)$ este meromorfă.

Teorema este demonstrată.

§ 4. Operatori complet continui pozitivi

1. Operatorii complet continui pozitivi definiți în spațiile Banach ordonate, au proprietăți mai bogate, pe care le vom expune în teoremele de mai jos.

Se înțelege că spațiile Banach din acest paragraf sînt reale *).

T e o r e m a 1. *Fie B un spațiu Banach ordonat, astfel ca închiderea acoperirii liniare a mulțimii elementelor pozitive B_+ să coincidă cu B.*

Dacă operatorul complet continuu și pozitiv T definit pe B are valori proprii diferite de 0, atunci operatorul T are o valoare proprie pozitivă ρ egală cu maximul modulului tuturor valorilor proprii ale operatorului T.

Valorii proprii ρ îi corespunde cel puțin un element propriu pozitiv $v \in B_+$ pentru operatorul T și o funcțională proprie pozitivă $f \in B_+^*$ pentru operatorul T^*.

D e m o n s t r a ț i e. Fie $\sigma(\widetilde{T})$ spectrul operatorului $\widetilde{T}$, care în cazul de față coincide cu mulțimea valorilor proprii ale acestui operator și $\sigma_m(\widetilde{T})$ mulțimea valorilor proprii de modul maxim.

Considerăm următoarele trei cazuri:

1) Mulțimea $\sigma_m(\widetilde{T})$ conține un număr pozitiv λ_0.

*) Vom întrebuința însă, pentru un spațiu Banach real B extensiunea sa complexă $\widetilde{B}$ și pentru un operator T definit pe B, operatorul $\widetilde{T}$ definit pe $\widetilde{B}$ (vezi cap. I, § 3).

În acest caz ne rămîne să arătăm că există un element $v \in B_+$ și o funcțională $f \in B_+^*$, astfel încît

$$T(v) = \lambda_0 v, \qquad (v \neq 0),$$
$$T(f) = \lambda_0 f, \qquad (f \neq 0).$$

Funcția rezolvantă a operatorului T se scrie, în vecinătatea lui λ_0, sub forma

$$R(\lambda;\ T) = \sum_{k=-n}^{+\infty} C_k (\lambda - \lambda_0)^k, \quad (C_{-n} \neq 0). \tag{1}$$

Deoarece C_{-n} este operator diferit de operatorul identic nul, există un element $u \in B_+$, astfel ca

$$C_{-n}(u) \neq 0$$

(în caz contrar, am avea $C_{-n}(B_+) = \{0\}$, ceea ce, în baza condiției teoremei, implică $C_{-n}(B) = 0$).

Din egalitatea

$$C_{-n}(u) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n} R(\lambda;\ \widetilde{T})(u) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^n} \sum_{k=-n+1}^{+\infty} C_k (\lambda - \lambda_0)^k$$

deducem

$$C_{-n}(u) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda;\ T)(u). \tag{2}$$

Aplicînd teorema 5 din capitolul VII, paragraful 2, pentru $\lambda > \lambda_0$ avem

$$R(\lambda;\ T)(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n(u).$$

Deoarece

$$\widetilde{T}^n(u) = T^n(u) \in B_+, \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

atunci $R(\lambda,\ \widetilde{T})(u) \in B_+$ $(\lambda > \lambda_0)$ și prin urmare, făcînd în (2), $\lambda \to \lambda_0 + 0$, obținem

$$v = -C_{-n}(u) \in B_+. \tag{3}$$

De altă parte

$$(\lambda I - T)\, R(\lambda;\ T) = I$$

(notînd cu $R(\lambda;\ T)$ restricția lui $R(\lambda;\ \widetilde{T})$ la B),
de unde rezultă

$$-T\, R(\lambda;\ T)(u) = (I - \lambda R(\lambda;\ T))(u).$$

Înmulțind ambele părți cu $(\lambda - \lambda_0)^n$ și trecînd la limită pentru $\lambda \to \lambda_0$, obținem

$$T\, C_{-n}(u) = \lambda_0\, C_{-n}(u)$$

sau

$$T(v) = \lambda_0\, v.$$

Mai departe observăm că, deoarece în (3) elementul $u \in B_+$ este arbitrar, avem

$$-C_{-n}(B_+) \subset B_+.$$

Considerăm o funcțională $g \in B_+^*$ astfel ca $g(v) > 0$. și punem $f = -C_{-n}^*(g)$.

Pentru orice $x \in B_+$ avem

$$f(x) = \langle x, -C_{-n}^*(g) \rangle = \langle -C_{-n}(x), g \rangle \geqslant 0,$$

deci

$$f \in B_+^*.$$

Aplicînd operatorului T^* același raționament pe care l-am aplicat lui T, ajungem la egalitatea

$$T^* f = \lambda_0 f.$$

2) Mulțimea $\sigma_m(\widetilde{T})$ conține o rădăcină λ_0 de ordin p (p număr natural) a unui număr pozitiv, astfel ca

$$T(u) = \lambda_0 u \quad \text{cu} \quad \lambda_0^p > 0.$$

În acest caz, operatorul T^p are valoarea proprie pozitivă $\lambda_0^p \in \sigma_m(\widetilde{T}^p)$. Însă operatorul T^p este și el pozitiv, deci i se poate aplica punctul 1) al acestei demonstrații, de unde deducem existența unui element $v \in B_+$, astfel ca

$$T^p(v) = \lambda_0^p v, \qquad (v \neq 0).$$

Elementul

$$v' = |\lambda_0|^{p-1} v + |\lambda_0|^{p-2} T(v) + |\lambda_0|^{p-3} T^2(v) + \ldots + T^{p-1}(v)$$

este un element propriu al operatorului T, corespunzînd valorii proprii λ_0, pentru că

$$T(v') = |\lambda_0|^{p-1} T(v) + |\lambda_0|^{p-2} T^2(v) + \ldots + |\lambda_0| T^{p-1}(v) + T^p(v) =$$

$$= |\lambda_0| \{ |\lambda_0|^{p-2} T(v) + |\lambda_0|^{p-3} T^2(v) + \ldots + T^{p-1}(v) \} + |\lambda_0|^p v =$$

$$= |\lambda_0| \{ |\lambda_0|^{p-1} v + |\lambda_0|^{p-2} T(v) + \ldots + T^{p-1}(v) \} = |\lambda_0| v'$$

Este evident că $v' \in B_+$ și $v' \neq 0$.

În mod analog se construiește și un element propriu aparținînd lui B_+^*, pentru operatorul T^*.

3) Mulțimea $\sigma_m(\widetilde{T})$ nu conține nici o rădăcină a unui număr pozitiv.

Fie $\lambda_0 \in \sigma_m(\widetilde{T})$ numărul care are partea reală cea mai mare (printre numerele din mulțimea $\sigma_m(\widetilde{T})$). Dacă notăm

$$\lambda_0 = \rho(\cos \alpha_0 + i \sin \alpha_0)$$

unghiul α_0 nu este multiplu de 2π.

Considerăm operatorul

$$\widetilde{T}_\varepsilon = \widetilde{T} + \varepsilon \widetilde{T}^2, \qquad (\varepsilon > 0).$$

Spectrul acestui operator este compus din numerele $\lambda + \varepsilon \lambda^2$, unde λ parcurge spectrul operatorului T: $\lambda \in \sigma(\widetilde{T})$.

Deoarece pentru orice $\lambda \in \sigma(\widetilde{T})$ avem $|\lambda| < \rho$, atunci, dacă ε este suficient de mic,

$$|\lambda + \varepsilon \lambda^2| < \rho.$$

Dacă $\lambda \in \sigma_m(\widetilde{T})$ și

$$\lambda = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

avem

$$|\lambda + \varepsilon \lambda^2| = \rho \sqrt{1 + \varepsilon^2 \rho^2 + 2\varepsilon\rho \cos \alpha}.$$

De aici rezultă că numerele $\lambda_0 + \varepsilon \lambda_0^2$ și $\overline{\lambda}_0 + \varepsilon \overline{\lambda}_0^2$ sînt valorile proprii de modul maxim ale operatorului $\widetilde{T}_\varepsilon$ (deoarece am presupus $\cos \alpha < \cos \alpha_0$).

Putem alege un șir de numere pozitive $\{\varepsilon_n\}$, astfel ca $\varepsilon_n \to 0$ cînd $n \to \infty$ și astfel ca numerele $\lambda_0 + \varepsilon_n \lambda_0^2$ să fie multipli de 2π. Potrivit cazului 2), numerele $\lambda_0 + \varepsilon_n \lambda_0^2$ sînt valorile proprii pozitive maximale ale operatorilor respectivi T_{ε_n}. De aici rezultă că λ_0 este pozitiv și este deci valoarea proprie a operatorului T cerută de teoremă.

Teorema este astfel complet demonstrată.

T e o r e m a 2. *Fie B un spațiu Banach ordonat satisfăcînd aceeași condiție ca în teorema* 1.

Presupunem că operatorul complet continuu, pozitiv, T, definit pe B, mai satisface și condiția următoare:

există un element $u \in B_+$ de normă 1, *un număr real $c > 0$ și un număr natural p astfel ca*

$$T^p(u) \geqslant cu. \tag{4}$$

Atunci operatorul T are valori proprii diferite de zero de modul maxim $\geqslant c^{1/p}$.

D e m o n s t r a ț i e. Din (4) rezultă

$$T^{np}(u) \geqslant c^n u$$

și, pentru orice funcțională $f \in B_+^*$,

$$f(T^{np}(u)) \geqslant c^n f(u),$$

de unde deducem

$$\|f\| \cdot \|T^{np}(u)\| \geqslant c^n f(u)$$

$$\|f\| \cdot \|T^{np}\| \geqslant c^n f(u)$$

$$\|T^{np}\| \geqslant c^n \frac{f(u)}{\|f\|}.$$

Dacă $f \in B_+^*$ este luat în așa fel încît $f(u) \neq 0$, din ultima inegalitate rezultă

$$\limsup_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n} \geqslant C^{1/p},$$

deci operatorul T are valori proprii de modul $\geqslant c^{1/p}$.

Combinînd teoremele 1 şi 2 obţinem imediat

T e o r e m a 3. *În condiţiile teoremei 2, operatorul T are o valoare proprie pozitivă $\rho \geqslant c^{1/p}$ căreia îi corespunde un element propriu pozitiv pentru operatorul T şi o funcţională proprie pozitivă pentru operatorul T.*

2. Teoremele precedente ne dau existenţa valorilor proprii şi elementelor proprii pozitive pentru anumiţi operatori complet continui. Dacă impunem spaţiului Banach parţial ordonat B condiţia ca B_+ să aibă interiorul nevid şi operatorului T o condiţie mai restrictivă, obţinem o teoremă de existenţă şi unicitate. În prealabil vom demonstra următoarea

L e m ă. *Fie B un spaţiu Banach ordonat astfel încît int $B_+ \neq 0$ şi T un operator complet continuu pozitiv, care are o valoare proprie pozitivă ρ şi un element propriu strict pozitiv v :*

$$T(v) = \rho v, \ \rho > 0, \quad v \in \operatorname{int} B_+ .$$

Atunci pentru orice $x \in$ int B_+, şirul elemcntelor $\{\rho^{-p} T^p(x)\}$. converge către un element pozitiv, care se găseşte la o distanţă pozitivă de frontiera mulţimii B_+.

D e m o n s t r a ţ i e. Deoarece $x \in \operatorname{int} B_+$, există un număr $\delta > 0$, astfel ca

$$x \geqslant \delta v .$$

Din această inegalitate deducem

$$\rho^{-p} T^p(x) \geqslant \delta v,$$

pentru orice număr natural p.

Alegem numărul $r > 0$ astfel ca sfera închisă cu centrul în δv şi de rază r să fie inclusă în B_+ : $\overline{S}(\delta v ; r) \subset B_+$. Atunci

$$\overline{S}(\rho^{-p} T^p(x) ; r) = \rho^{-p} T^p(x) - \delta v + \overline{S}(\delta v ; r) \subset B_+$$

şi lema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei leme se demonstrează

T e o r e m a 4. *Fie B un spaţiu Banach parţial ordonat astfel încît int $B_+ \neq 0$ şi T un operator complet continuu pozitiv definit pe B.*

Presupunem că operatorul T verifică şi următoarea condiţie: α) Pentru orice element $x \in Fr\ B_+$ $(x \neq 0)$ există un număr natural $n = n(x)$, astfel încît $T^n(x) \in$ int B_+.

Atunci sînt verificate următoarele propoziţii :

a) *Operatorul T are în int B_+ un element propriu v de normă 1 şi numai unul:*

$$T(v) = \rho v, \rho > 0, \qquad v \in \operatorname{int} B_+, \quad \|v\| = 1.$$

b) *Operatorul conjugat T^* are în B_+^* o funcţională proprie φ, de normă 1, şi numai una:*

$$T^*(\varphi) = \rho \varphi, \ \|\varphi\| = 1,$$

$$\varphi(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in B_+, \ x \neq 0.$$

c) *Valoarea proprie ρ, corespunzătoare, este simplă şi de modul maximal ($\rho \in \sigma_m(\widetilde{T})$).*

Invers, dacă operatorul complet continuu pozitiv are proprietățile a), b) și c), atunci el verifică și condiția α).

Pentru demonstrație trimitem la articolul lui M. G. Krein și M. A. Rutman, [187], din care sînt luate toate teoremele acestui paragraf.

§ 5. Operații relativ complet continue

1. Multe din proprietățile operațiilor complet continue se păstrează și la alte categorii, mai largi, de operații. Una din aceste categorii o constituie operațiile relative complet continue, care generalizează operațiile complet continue, în sensul că transformă orice mulțime mărginită într-o mulțime relativ compactă, însă față de altă normă.

Pentru a preciza, vom considera un spațiu Banach B și un subspațiu al său (nu neapărat închis) L. Presupunem că spațiul L este, la rîndul său, organizat ca spațiu Banach cu o altă normă decît cea din B. Deci pentru un element x pin L sînt definite două norme; vom nota norma din spațiul B ca deobicei $\|x\|$, iar cea de-a doua normă cu $\|x\|_L$.

Definiție. *O operație T definită pe spațiul Banach B se numește relativ complet continuă (față de subspațiul L) dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:*

i) $$T(B) \subset B, \quad T(L) \subset L \subset B;$$

ii) *T este continuă de la B la B, de la L la B și de la L la L;*

iii) *T transformă orice mulțime mărginită în L într-o mulțime compactă în B.*

2. Pentru a simplifica scrierea, întrebuințăm următoarele notații:

1) $$V = I - T$$

(T fiind tot timpul o operație relativ complet continuă și I operația identitate);

2) M_n, mulțimea soluțiilor ecuației

$$(I - T)^n (x) = 0,$$

incluse în L;

3) $\complement M_n$, complementara în L.

Pentru a stabili diferite rezultate pe care le urmărim, mai sînt necesare unele condiții suplimentare, pe care le enunțăm de la început dar care nu intervin decît treptat în teoremele care vor urma. Aceste condiții sînt:

a) Pentru orice $n \in N$, orice mulțime de soluții, aparținînd lui L, ale ecuației

$$(I - T)^n (x) = 0,$$

mărginită în B este mărginită și în L;

b) Pentru orice n, dacă

$$M_n \cap \complement M_{n-1} \neq \emptyset,$$

atunci există un element $x_n \in L$, astfel ca

b_1) $\quad \| x_n \|_L \leqslant k$, k fiind o constantă independentă de n;

b_2) $\quad T(x_n) \in V^n(L) \cap \complement V^{n+1}(L)$;

b_3) $\quad \| T(x_n) - T(x_m) \|_B > \eta > 0$, pentru $n \neq m$;

c) Orice șir $\{x_n\}$, mărginit în B, de soluții ale ecuației

$$(I - T)(x) = y \qquad \text{cu } y \in L,$$

și astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \| (I - T)(x_n) \|_L = 0,$$

este mărginit în L;

d) Pentru orice n, dacă

$$V^n(L) \cap \complement V^{n+1}(L) \neq 0,$$

atunci există un element $x_n \in L$, astfel ca

d_1) $\quad \| x_n \|_L \leqslant k$;

d_2) $\quad T(x_n) \in V^n(L) \cap \complement V^{n+1}(L)$;

d_3) $\quad \| T(x_n) - T(x_m) \|_B > \eta > 0, \quad$ pentru $n \neq m$.

3. Teorema 1. *Dacă este îndeplinită condiția a), atunci soluțiile în L ale ecuației*

$$(I - T)^n(x) = 0 \tag{1}$$

constituie un spațiu cu un număr finit de dimensiuni.

Demonstrație. Fie M_n mulțimea soluțiilor menționate.

Mulțimea M_n este un subspațiu liniar închis al lui L, ca imagine inversă a elementului 0 printr-o operație liniară și continuă.

Fie acum $M \subset M_n$ o mulțime mărginită în B.

Din condiția a) rezultă că M este mărginită și în L.

Ecuația (1) se mai poate scrie sub forma

$$(I - TA)(x) = 0,$$

unde A este o operație liniară, continuă de la L la L, deci transformă orice mulțime mărginită în L într-o mulțime mărginită în L.

Operația TA transformă orice mulțime mărginită în L într-o mulțime relativ compactă în B. Atunci $M = TA(M)$ este o mulțime relativ compactă în B.

Am arătat astfel că orice mulțime $M \subset M_n$, mărginită față de norma din B, este și relativ compactă în B. De aici rezultă că M_n are un număr finit de dimensiuni.

Observație. M_n având un număr finit de dimensiuni, este un subspațiu liniar închis, atît al lui L cît și al lui B, iar cele două norme sînt în acest caz echivalente.

4. Este ușor de văzut că $M_n \subset M_{n+1}$ și că dacă $M_\nu = M_{\nu+1}$, atunci $M_\nu = M_{\nu+p}$ pentru orice p. Vom demonstra acum

Teorema 2. *Dacă operația T satisface condiția b), atunci există un întreg ν astfel ca*

$$M_\nu = M_{\nu+1}.$$

Demonstrație. Să presupunem contrariul, adică

$$M_{n+1} \subset M_n \neq 0, \text{ pentru orice } n.$$

Atunci condiția b) ne asigură existența unui șir infinit $\{x_n\}$, satisfăcînd relațiile din b_1), b_2), b_3).

Dar condiția b_1) implică relativ-compactitatea șirului $\{T(x_n)\}$, deci existența unui subșir, convergent în B, ceea ce contrazice condiția b_3).

Rezultă că șirul $\{x_n\}$ trebuie să fie finit, deci că există numărul ν cerut de teoremă.

Observație. Condiția a) nu intervine în demonstrarea teoremei 2.

Tot numai cu ajutorul condiției b) avem și

Teorema 3. *Dacă este îndeplinită condiția b) și ecuația*

$$(I - T)(x) = y$$

are o soluție pentru orice $y \in L$, atunci această soluție este unică.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm că ecuația

$$V(x) = 0,$$

are o singură soluție, $x = 0$.

Să presupunem contrariul, adică existența unui element $x_1 \neq 0$, astfel încît

$$V(x_1) = 0.$$

Fie atunci x_2 o soluție a ecuației

$$V(x) = x_1,$$

și, în general, x_{n+1} o soluție a ecuației

$$V(x) = x_n.$$

Pentru orice $n > 1$,

$$V^n(x_n) = V^{n-1}(x_{n-1}) = \ldots = V(x_1) = 0$$

și

$$V^{n-1}(x_n) = V^{n-2}(x_{n-1}) = \ldots = V(x_2) = x_1 \neq 0,$$

ceea ce contrazice teorema 2.

Această teoremă ne asigură existența operației inverse V^{-1}, univoc determinată, într-un caz particular.

Continuitatea operației V^{-1} (dacă există) este dată de

Teorema 4. *Dacă sînt îndeplinite condițiile a) și c), există o constantă m, independentă de y, astfel ca cel puțin una din soluțiile ecuației*

$$V(x) = y,$$

dacă există soluții, satisface inegalitatea

$$\|x\|_L \leqslant m \|y\|_L.$$

Demonstrație. Pentru orice y astfel ca ecuația $V(x) = y$ are o soluție, există o soluție minimală $\bar{x}$, care satisface inegalitatea

$$\|\bar{x}\|_L \leqslant \|\bar{x} - x\|_L.$$

Trebuie să demonstrăm că nu există nici un șir $\{y_n\}$ cu soluțiile minimale corespunzătoare $\{\bar{x}_n\}$, astfel ca

$$\frac{\|\bar{x}_n\|_L}{\|y\|_L} \to \infty. \tag{2}$$

Să presupunem contrariul, adică existența unui șir $\{y_n\}$ care satisface condiția (2). Putem lua $\|y_n\|_L = 1$, de unde rezultă $\|\bar{x}_n\|_L \to \infty$. Sînt numai două posibilități:

1) $$\|\bar{x}_n\| \to \infty;$$

2) există un subșir $\{\bar{x}_{n_\nu}\}$ astfel ca

$$\|\bar{x}_{n_\nu}\| \leqslant k.$$

Vom arăta că amîndouă cazurile ne conduc la contradicții:

1) Să notăm

$$x_n = \frac{\bar{x}_n}{\|\bar{x}_n\|},$$

de unde rezultă

$$\|x_n\| = 1$$

și

$$T(x_n) = V(x_n) + \frac{y_n}{\|\bar{x}_n\|}.$$

Acum se ivesc iar două posibilități:

1_1) $\|x_n\|_L \leqslant h$, h fiind o constantă independentă de n;

1_2) există un subșir $\{x_{n_q}\}$, astfel ca

$$\|x_{n_q}\|_L \to \infty.$$

Vom examina pe rînd ultimile două cazuri:

1) Dacă $\|x_n\|_L \leqslant h$, șirul $\{T(x_n)\}$ este relativ compact în B, deci există un subșir $\{x_{n_i}\}$ și un element $x \in B$ satisfăcînd condițiile

$$\lim_{i \to \infty} \|T(x_{n_i}) - x\| = 0$$

și

$$(I - T)(x) = 0.$$

Însă atunci

$$\lim_{i \to \infty} \|x_{n_i} - x\| = 0$$

și, de altă parte,

$$\|x_{n_i} - x\| \geqslant \|x_{n_i}\| = 1,$$

ceea ce este imposibil.

1_2) Existența șirului $\{x_{n_q}\}$, astfel ca

$$\lim_{q\to\infty} \| x_{n_q} \| = \infty$$

contrazice condiția *c*).

2) Dacă $\| \bar{x}_{n_p} \| \leqslant k$, să notăm

$$x'_{n_p} = \frac{\bar{x}_{n_p}}{\| \bar{x}_{n_p} \|_L},$$

de unde rezultă

$$\| x'_{n_p} \|_L = 1$$

și

$$T(x'_{n_p}) = V(x'_{n_p}) + \frac{y_{n_p}}{\| \bar{x}_{n_p} \|_L}.$$

Șirul $\{x'_{n_p}\}$ fiind mărginit în L, rezultă că șirul $\{T(x'_{n_p})\}$ este relativ compact în B, deci că există un subșir $\{x'_{n_{p_i}}\}$ și un element $x'' \in B$, astfel ca

$$\lim_{i\to\infty} \| T(x'_{n_{p_i}}) - x'' \| = 0$$

și

$$V(x'') = 0.$$

Se ajunge la aceeași contradicție ca în cazul 1_1).

Teorema este astfel complet demonstrată.

T e o r e m a 5. *În ipotezele a) și c) operația V transformă orice subspațiu liniar normat al lui L în subspațiu liniar normat al lui L.*

D e m o n s t r a ț i e. Este o consecință imediată a teoremei precedente și a teoremelor de la capitolul II, paragraful 1.

C o r o l a r. *Dacă sînt îndeplinite condițiile a) și c), imaginea lui L prin operația V^n este un subspațiu liniar normat al lui L.*

5. Este evident că $V^{n+1}(L) \subset V^n(L)$ și că dacă $V^{\nu+1}(L) = V^\nu(L)$, atunci $V^{\nu+p}(L) = V^\nu(L)$ pentru orice p.

Teorema următoare ne dă existența unui întreg ν, avînd ultima proprietate.

T e o r e m a 6. *Să presupunem îndeplinite condițiile a), b), c) și d). Atunci există un întreg ν, astfel ca*

$$V^{\nu+1}(L) = V^\nu(L).$$

Acest întreg coincide cu cel dat de teorema 2.

D e m o n s t r a ț i e. Existența întregului ν rezultă din condiția *d*) în același fel cum a rezultat în teorema 2 din condiția *b*).

Pentru coincidența celor doi ν, vom da următoarea demonstrație:

Observăm la început că ecuația

$$V(x) = y \quad \text{cu} \quad y \in V^\nu(L)$$

(ν fiind aici cel dat de teoremă) are cel puțin o soluție în $V^\nu(L)$, deoarece

$$V^\nu(L) = V(V^\nu(L)) = V^{\nu+1}(L).$$

Vom arăta că această soluție este unică, ceea ce revine la a spune că ecuația

$$V(x) = 0$$

nu are decît soluția 0 în $V^\nu(L)$.

Dacă presupunem contrariul, fie $x_1 \in V^\nu(L)$, astfel ca

$$V(x_1) = 0 \quad \text{și} \quad x_1 \neq 0,$$

și, în general, fie $x_n \in V^\nu(L)$, astfel ca

$$V(x_n) = x_{n-1}, \qquad (n = 2, \ldots).$$

Am avea, pentru orice $n > 2$,

$$V^n(x) = 0, \quad V^{n-1}(x) \neq 0,$$

contrar teoremei 2.

Mai departe,

$$V^{\nu+1}(x) = 0$$

implică

$$V^\nu(x) = 0.$$

De altă parte, pentru orice $n < \nu$ se poate găsi un element x, astfel ca

$$V^{n+1}(x) = 0 \quad \text{și} \quad V^n(x) \neq 0.$$

Pentru aceasta luăm un element

$$x' \in V^{\nu-n-1}(L) \cap \complement V^{\nu-n}(L),$$

astfel ca

$$V^n(x') = 0.$$

Elementul

$$x'' = V^{n+1}(x')$$

aparține lui $V^\nu(L)$. Există deci un element $x''' \in V^\nu(L)$, astfel ca

$$V^{n+1}(x''') = x''.$$

Elementul

$$x = x' - x'''$$

satisface ecuațiile

$$V^{n+1}(x) = 0 \quad \text{și} \quad V^n(x) \neq 0,$$

deoarece

$$V^n(x) = V^n(x') - V^n(x'''),$$
$$V^n(x') \in V^{\nu-1}(L) \cap \complement V^\nu(L),$$
$$V^n(x'') \in V^\nu(L).$$

Am arătat astfel că ν satisface și condițiile celui dat de teorema 2 și astfel teorema 6 este complet demonstrată.

Teorema care urmează este o consecință imediată a teoremelor anterioare.

T e o r e m a 7. *Presupunem că sînt îndeplinite condițiile a), b), c) și d). Pentru ca operația V să aibă o operație inversă V^{-1} continuă, definită pe L, este necesar și suficient ca ecuația*

$$V(x) = 0$$

să aibă o singură soluție (elementul 0).

6. Vom demonstra necesitatea condițiilor *a)*, *b)*, *c)*.

T e o r e m a 8. *Dacă mulțimea soluțiilor în L ale ecuației*

$$V(x) = 0$$

este un spațiu cu un număr finit de dimensiuni, atunci condiția a) este îndeplinită.

D e m o n s t r a ț i e. Rezultă din faptul că cele două norme sînt echivalente în acest caz.

T e o r e m a 9. *Dacă există numărul ν din teorema 2, atunci condiția b) este îndeplinită.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie

$$x_n' \in M_n \cap \complement M_{n-1}, \quad \text{pentru } n \leqslant \nu.$$

Elementul

$$x_n = A(x_n'),$$

unde A este transformarea care intervine în demonstrația teoremei 2, are proprietățile $b_1)$, $b_2)$, $b_3)$.

Într-adevăr, $b_1)$ este evidentă, deoarece mulțimea $\{x_n\}$ este finită, $b_2)$ este dată de relația

$$x_n' = T(x_n) = TA(x_n'),$$

iar numărul η din $b_3)$ este

$$\eta = \min_{n \leqslant \nu} \left\{ \inf_{x \in M_{n-1}} \| x_n' - x \| \right\}.$$

T e o r e m a 10. *Dacă $V(L)$ este o mulțime închisă în L și este valabilă concluzia teoremei 4, atunci condiția c) este îndeplinită.*

D e m o n s t r a ț i e. Pentru orice $y \in V(L)$ există, datorită concluziei teoremei 4, un element $x \in L$, astfel ca

$$\| x \|_L \leqslant m \| y \|_L.$$

7. În vederea teoriei ergodice, mai considerăm și următoarea condiție, impusă operației T și unei mulțimi oarecare Λ de numere complexe:

f) Pentru orice șir $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots\}$ de valori proprii aparținînd mulțimii Λ, ale operației T și oricare ar fi alegerea elementelor proprii corespunzătoare $\{x(\lambda_1), \ldots, x(\lambda_k), \ldots\}$, există un șir de elemente $\{x_k\}$, astfel ca

$f_1)$ $$\| x_k \|_L \leqslant H,$$

$f_2)$ $$T(x_k) \in M^k \cap \complement M^{k-1},$$

$f_3)$ $$\| T(x_k) - T(x_j) \| > \eta > 0, \quad \text{pentru } k \neq j.$$

Am notat prin M^k spațiul vectorial, inclus în L, generat de elementele $x(\lambda_1), \ldots, x(\lambda_k)$.

La fel ca teorema 2 se demonstrează și

T e o r e m a 11. *Dacă operația T și mulțimea de numere complexe Λ satisfac condiția f), atunci mulțimea valorilor proprii ale operației T, aparținînd mulțimii Λ, este finită.*

§ 6. Clase speciale de operații relativ complet continue

1. Acest paragraf este consacrat unor condiții mai puțin generale, dar mai simple, care implică condițiile impuse în paragraful precedent operațiilor relativ complet continue.

Considerăm, la fel ca în paragraful precedent, un spațiu Banach B și un subspațiu liniar (nu neapărat închis) L și păstrăm aceleași convenții și notații.

Presupunem, în plus, că spațiile L și B satisfac și următoarea condiție:

j) *Pentru orice șir $\{x_n\}$ de elemente din B, astfel ca*

$$\|x_n\|_L \leqslant K$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n^{\circ} - x\| = 0$$

avem

$$x \in L \quad \text{și} \quad \|x\|_L \leqslant K.$$

Fie mai departe, T o operație care satisface condițiile:

i) $$T(B) \subset B, \quad T(L) \subset L;$$

ii') *T este continuă de la L la L;*

iii) *T transformă orice mulțime mărginită în L, într-o mulțime relativ compactă în B*

și următoarele condiții

α) $$\|T^n(\dot{x})\| \leqslant H\|x\|$$

H fiind o constantă independentă de n și x;

β) *Există două constante pozitive, R și r $(0 < r < 1)$, astfel ca*

$$\|T(x)\|_L \leqslant r\|x\|_L + R\|x\|.$$

Vom demonstra că operația T satisface și condițiile

ii), *a*), *b*), *c*).

Mai întîi vom demonstra două leme:

L e m a 1. *Pentru orice $m = 1,2 \ldots$ avem*

$$\|T^m(x)\|_L \leqslant r^m\|x\|_L + Q\|x\|,$$

Q fiind o constantă independentă de x și n.

Demonstrație. Condițiile α) și β) ne dau

$$\| T^m(x) \|_L \leqslant r \| T^{m-1}(x) \|_L + R \| T^{m-1}(x) \| \leqslant$$
$$\leqslant r \| T^{m-1}(x) \|_L + RH \| x \| \leqslant r \| T^{m-1}(x) \|_L + Q' \| x \|,$$

unde

$$Q' = \max(R,\ R\ H).$$

Atunci

$$\| T^m(x) \|_L - \frac{Q'}{1-r} \| x \| \leqslant r \left[\| T^{m-1}(x) \|_L - \frac{Q'}{1-r} \| x \| \right]$$

de unde, prin iterație, rezultă

$$\| T^m(x) \|_L - \frac{Q'}{1-r} \| x \| \leqslant r^m \left[\| (x) \|_L - \frac{Q'}{1-r} \| x \| \right]$$

$$\| T^m(x) \|_L \leqslant r^m \| x \|_L + \frac{Q'}{1-r} \| x \| - \frac{r^m}{1-r} Q' \| x \| \leqslant$$

$$\leqslant r^m \| x \|_L + \frac{Q'}{1-r} \| x \|.$$

Este suficient să luăm

$$Q = \frac{0\ Q'}{1-r}$$

pentru a obține inegalitatea lemei

$$\| T^m(x) \|_L \leqslant r^m \| x \|_L + Q \| x \|.$$

Lema 2. *Fie* $\{x_n\}$ *un șir de elemente, mărginit în* B.

Din șirul dublu $\{T^p(x_n)\}$ *se poate extrage un subșir mărginit în* L.

Demonstrație. Fie q un număr pozitiv astfel ca $\| x_n \| \leqslant q\ (n = 1,2\ldots)$. Ținînd seama de lema precedentă, avem

$$\| T^p(x_n) \|_L \leqslant r^p \| x_n \|_L + Q_q.$$

De altă parte, pentru fiecare n se poate găsi un indice p_n, astfel ca

$$r^{p_n} \| x_n \|_L \leqslant 1, \qquad (0 < r < 1).$$

Rezultă că

$$\| T^{p_n}(x_n) \|_L \leqslant Qq + 1$$

și lema este demonstrată.

Acum vom trece la verificarea condițiilor

ii), *a*), *b*), *c*).

ii) T este continuă de la B la B, din condiția *a*).

Continuitatea de la L la B este dată prin condiția iii), căci orice mulțime compactă este mărginită.

a) Pentru orice n, orice mulțime mărginită în B de soluții ale ecuației

$$(I - T)^n(x) = 0$$

aparținînd lui L, este mărginită și în L.

Demonstrație. Fie M o mulțime de soluții din L ale ecuației

$$V^n = (I - T)^n(x) = 0$$

sau

$$(I - nT + \ldots + T^n)(x) = 0$$

mărginită în L.

Pentru orice element $x \in M$ avem

$$x = TA(x),$$

unde $A = nI + \ldots + T^{n-1}$

și A este o operație liniară, continuă de la B la B (condiția α)) și de la L la L (condiția ii')).

Condiția (β) ne dă iii)

$$\|x\|_L = \|TA(x)\|_L \leqslant r\|A(x)\|_L + R\|A(x)\|.$$

În sfîrșit obținem

$$\|x\|_L = \|TA(x)\|_L \leqslant r\|A\|_L\|x\|_L + R\|A(x)\|_L$$

$$\|x\|_L(1 - r\|A\|_L) \leqslant R\|A\|\|x\|$$

$$\|x\|_L = \leqslant \frac{R\|A\|}{1 - r\|A\|_L}\|x\|$$

și condiția a) este verificată.

b) Pentru orice n, dacă $M_n \cap \complement M_{n-1} \neq \emptyset$, există un element $x_n \in L$, astfel ca:

b_1) $\|x_n\|_L \leqslant K$, K fiind o constantă independentă de n.

b_2) $T(x_n) \in M_n \cap \complement M_{n-1}$.

b_3) $\|T(x_n) - T(x_m)\| > \eta > 0$, $n \neq m$.

Demonstrație. Dacă $M_n \cap \complement M_{n-1} = \emptyset$, există un element x_n, astfel ca

$$x_n \in M_n,\ \|x_n\| = 1 \quad \text{și} \quad \|x_n - x\| > \frac{1}{2}$$

pentru orice $x \in M_{n-1}$.

Fie

$$x_n^1 = x_n - T(x_n);$$

avem

$$V^{n-1}(x_n^1) = V^{n-1}(x_n - T(x_n)) = V^{n-1}(I - T)(x_n) = V^n(x_n) = 0,$$

de unde rezultă

$$x_n^1 \in M_{n-1}.$$

Fie, în general,

$$x_n^p = x_n - T^p(x_n).$$

Avem

$$x_n^p \in M_{n-1}.$$

Această relație o vom demonstra prin inducție completă.
Pentru $p = 1$ relația este demonstrată.
Să presupunem că avem

$$x_n^{p-1} \in M_{n-1}.$$

Atunci

$$x_n^p = x_n - T^p(x_n) = x_n - T(x_n) + T(x_n) - T^p(x_n) = (I - T)(x_n) +$$
$$+ T(I - T^{p-1})(x_n) = (I - T)(x_n) + T(x_n^{p-1})$$
$$V^{n-1}(x_n^p) = V^{n-1}(I - T)(x_n) + V^{n-1}T(x_n^{p-1}) = V^n(x_n) +$$
$$+ TV^{n-1}(x_n^{p-1}) = 0,$$

de unde rezultă

$$x_n^p \in M_{n-1}.$$

Șirul $\{x_n\}$ fiind mărginit în B se poate extrage din șirul dublu

$$\{T^p(x_n)\} = \{x_n - x_n^{p_n}\}$$

un subșir mărginit în L (lema 2).
Fie

$$\{T^{p_n}(x_n)\} = \{x_n - x_n^p\} = \{y_n\}$$

acest șir. El are proprietățile cerute de condiția b).
Într-adevăr, b_1) este demonstrată și pentru b_2) și b_3) este suficient să observăm că

$$T(y_n) = T^{p_n+1}(x_n) = x_n - x_n^{p_n+1}$$

aparține mulțimii $M_n \cap \complement M_{n-1}$, deoarece $x_n \in M_n \cap \complement M_{n-1}$ și că, pentru $m < n$,

$$T(y_n) - T(y_m) = x_n - x_n^{p_n+1} - x_m + x_m^{p_m+1}$$

este forma

$$x - z_{n-1} \quad \text{cu} \quad z_{n-1} \in M_{n-1}$$

și deci

$$\| T(y_n) - T(y_m \| = \| x_n - x_{n-1} \| > \frac{1}{2}.$$

Condiția b) este demonstrată.
c) Orice șir $\{x_n\}$, mărginit în B, de soluții ale ecuației

$$(I - T)(x) = y \quad \text{cu} \quad y \in L$$

și astfel încît șirul $\{\|(I - T)(x_n)\|_L\}$ converge către 0, este mărginit în L.
Demonstrație. Fie $\{y_n\}$ și $\{x_n\}$ două șiruri din L, astfel ca

$$(I - T)(x_n) = y_n \quad \|y_n\|_L \to 0 \quad \text{și} \quad \|x_n\| \leqslant C.$$

Avem

$$x_n = T(x_n) + y_n$$

de unde rezultă

$$\| x_n \|_L \leqslant \| T(x_n) \|_L + \| y_n \|_L.$$

Dar condiția β) ne dă

$$\| T(x_n) \|_L \leqslant r \| x_n \|_L + R \| x_n \|$$

de unde deducem

$$\| x_n \|_L \leqslant r \| x_n \|_L + c'$$

$$\| x_n \|_L (1 - r) \leqslant c'$$

$$\| x_n \|_L \leqslant \frac{c'}{1 - r}$$

Condiția c) este demonstrată.

Trecem acum la condiția f).

Condiția f) este satisfăcută în ipotezele i), iii), j), α), β) dacă Λ este mulțimea numerelor complexe de modul 1.

Demonstrație. Să presupunem într-adevăr că

$$M^k \cap \complement M^{k-1} \neq \emptyset$$

și fie

$$\| x_k \| \in M^k \cap \complement M^{k-1}$$

cu

$$\| x_k \| = 1, \quad \| x_k - x \| > \frac{1}{2}$$

pentru orice $x \in M^{k-1}$.

Vom demonstra mai întîi propoziția următoare :

$$\lambda^p T^p(x_n) \in M^k$$

pentru orice număr complex λ de modul 1 și pentru orice p.

Este suficient să arătăm că

$$T(x_k) \in M^k.$$

Într-adevăr

$$T(x_k) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x(\lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(x(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} x(\lambda_i),$$

de unde

$$T(x_k) \in M^k.$$

Mai mult, vom arăta că

$$\lambda_k^p T^p(x_k) - x_k \in M^{k-}$$

(λ_k fiind valoarea proprie a lui T).

Relația este adevărată pentru $p = 1$, deoarece

$$\lambda_k T(x_k) - x_k = \lambda_k T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x(\lambda_i)\right) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x(\lambda_i) =$$

$$= \lambda_k \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(x(\lambda_i)) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x(\lambda_i)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} - 1\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_i} - 1\right) x(\lambda_i) \in M^{k-1}.$$

Să presupunem acum că relația este adevărată pentru $p-1$ adică

$$\lambda_k^{p-1} T^{p-1}(x_k) - x_k \in M^{k-1}.$$

Atunci

$$\lambda_k^p T^p(x_k) - x_k = \lambda_k T(\lambda_k^{p-1} T^{p-1}(x_k)) - x_k =$$

$$= \lambda_k T[\lambda_k^{p-1} T^{p-1}(x_k) - x_k] + \lambda_k T(x_k) - x_k,$$

de unde rezultă

$$\lambda_k^p T^p(x_k) - x_k \in M^{k-1}.$$

Din șirul dublu

$$\{\lambda_k^p T^p(x_k)\}$$

se poate extrage (lema 2) un subșir mărginit în L, care se bucură de proprietățile f_1), f_2), f_3) și demonstrația continuă ca pentru condiția b).

2. Tot din condițiile de mai sus, rezultă și următoarea

P r o p o z i ț i e. *Oricare ar fi* $m = 1,2,\ldots$, *avem*

$$\|T^m(x)\|_L \leqslant k \|x\|_L,$$

pentru orice $x \in L$, *constanta* k *fiind independentă de* x *și* m.

D e m o n s t r a ț i e. Din lema 1 deducem

$$\limsup_m \|T^m(x)\|_L < +\infty$$

pentru orice $x \in L$. Putem aplica atunci teorema 3 din capitolul II, paragraful 4, și propoziția rezultă.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Studiul operatorilor complet continui datează de la H i l b e r t, care i-a introdus pentru spațiul ce-i poartă numele.

Teoria ecuațiilor liniare cu operatori complet continui i se datorește lui F. R i e s z [224], care a elbaborat-o pentru spațiul funcțiilor continue, însă într-o formă valabilă pentru orice spațiu Banach.

J. S c h a u d e r [238] a generalizat teoria lui Riesz, introducînd paralelismul cu spațiul conjugat.

2. Studiul analitic al algebrei Banach a operatorilor complet continui a fost întreprins de M. N a g u m o [213], care a stabilit că în această algebră inversul $R(\lambda; x)$ este o funcție meromorfă de λ. Teoremele corespunzătoare în algebrele Banach redate în această carte, se găsesc în E. H i l l e [13].

3. Operatorii complet continui pozitivi în spațiileBanach au fost studiați de matematicienii sovietici în frunte cu M. G. K r e i n. Realizările lor sînt expuse de M. G. K r e i n și M. A. R u t m a n în lucrarea [187].

4. Operațiile relativ complet continue au fost introduse de G. M a r i n e s c u [198]. Clasele speciale de operații relativ complet continue au fost cercetate de C. T. I o n e s c u T u l c e a și G. M a r i n e s c u [138] și [139].

CAPITOLUL IX

TEORIA ERGODICĂ

În analiza funcțională, prin teoria ergodică se înțelege studiul iteratelor T^n ale unui operator T, pentru n tinzînd către infinit, sau, mai general, studiul unei mulțimi speciale de operatori.

Obiectul acestui capitol îl constituie studiul teoremelor ergodice în medie și, în special, al teoremei ergodice uniforme, în forma lor cea mai generală.

În tot acest capitol vom însemna prin B un spațiu Banach complex și prin L un subspațiu vectorial al lui B (nu neapărat închis în B).

Presupunem că în L este definită o a doua normă, pe care o vom nota

$$\|x\|_L, \tag{1}$$

și față de care L este un spațiu Banach complex.

Dacă un șir de elemente este convergent față de norma spațiului B, vom spune, pentru a evita confuziile, că este convergent în B. De asemenea, dacă este convergent față de norma (1), vom spune că este convergent în L.

§ 1. Teoreme ergodice în medie

1. Vom întrebuința următoarele notații. Dacă T este un operator liniar definit pe spațiul B, notăm, ca de obicei, prin V operatorul

$$V = I - T$$

și prin V^* operatorul

$$V^* = I - T^*$$

2. Teoremele care urmează constituie o pregătire a teoremelor ergodice, însă sînt interesante și în sine.

Teorema 1. *Fie T un operator liniar continuu, definit pe spațiul B. Dacă șirul $\left\{\frac{1}{n} T^n(x)\right\}$ converge către 0 în B, pentru orice $x \in B$, atunci șirul*

$$\left\{\frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y)\right\}$$

converge către 0 în B, pentru orice $y \in V(B)$.

Demonstrație. $y \in V(B)$ implică existența unui element $x \in B$, astfel ca

$$y = x - T(x).$$

Atunci

$$\left\| \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| = \left\| \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(x - T(x)) \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{n} (T - T^{n+1})(x) \right\| \leqslant \| T \| \left\| \frac{1}{n} x - \frac{1}{n} T^n(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \| T \| \left(\frac{\| x \|}{n} + \frac{\| T^n(x) \|}{n} \right),$$

de unde rezultă

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(y) = 0.$$

Teorema 2. *Dacă operatorul T satisface condiția teoremei* 1 *și dacă*

$$\left\| \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| \leqslant K \| y \|,$$

pentru orice $y \in \overline{V(B)}$, constanta K fiind independentă de n și y, atunci șirul

$$\left\{ \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\}$$

converge către 0 *pentru orice element $y \in \overline{V(B)}$.*

Demonstrație. Dacă $y \in V(B)$, afirmația rezultă din teorema precedentă.

Dacă y nu aparține mulțimii $V(B)$, însă $y \in \overline{V(B)}$, atunci există pentru orice $\varepsilon > 0$, un element $y' \in V(B)$, astfel ca

$$\| y - y' \| < \varepsilon,$$

și se poate scrie

$$\left\| \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| = \left\| \frac{1}{n} (T + \ldots + T^n)(y - y' + y') \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \frac{1}{n} (T + \ldots + T^n)(y - y') \right\| + \left\| \frac{1}{n} (T + \ldots + T^n)(y') \right\| \leqslant$$

$$\leqslant K\varepsilon + \left\| \frac{1}{n} (T + \ldots + T^n)(y') \right\|.$$

Ținînd seama de teorema 1,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \frac{1}{n} (T + \ldots + T^n)(y') \right\| = 0$$

şi prin urmare

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| \leqslant K\varepsilon,$$

de unde rezultă, deoarece ε este arbitrar,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| = 0.$$

Teorema este demonstrată.

Teoremele 1 şi 2 sînt evident valabile, dacă se înlocuieşte spaţiul B prin spaţiul L.

Ele sînt însă valabile şi dacă această înlocuire se face numai parţial, păstrînd convergenţa faţă de norma din B. Mai precis, avem următoarele teoreme corespunzătoare:

T e o r e m a 3. *Fie T un operator liniar continuu (în B) definit pe L. Dacă şirul* $\left\{\frac{1}{n} T^n(x)\right\}$ *converge în B către 0, pentru orice $x \in L$, atunci şirul*

$$\left\{\frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y)\right\}$$

converge către 0 (în B) pentru orice $y \in V(L)$.

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă $y \in V(L)$, există $x \in L$, astfel ca

$$y = x - T(x)$$

şi demonstraţia continuă ca pentru teorema 1.

T e o r e m a 4. *Dacă operatorul T satisface condiţiile teoremei 3 şi dacă*

$$\left\| \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y) \right\| \leqslant K \|y\|,$$

pentru orice $y \in \overline{V(L)}$ (închiderea fiind considerată faţă de norma din B), atunci şirul

$$\left\{\frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(y)\right\}$$

converge către 0 (în B) pentru orice element $y \in \overline{V(L)}$.

Demonstraţia este aceeaşi ca pentru teorema 2.

3. Trecem acum la teoremele ergodice în medie.

T e o r e m a 5 (prima teoremă ergodică în medie). *Fie T un operator liniar continuu definit pe spaţiul B şi elementul $x \in B$, satisfăcînd următoarele condiţii:*

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|T^n(z)\| = 0,$$

pentru orice $z \in B$ (sau pentru orice $z \in L$);

2) *Şirul $\{x_n\}$, unde*

$$x_n = \frac{1}{n}(T + \ldots + T^n)(x)$$

conține un subșir slab convergent în B către un element $x \in B$;

3) $x - \bar{x} \in V(B)$ (respectiv $x - \bar{x} \in V(L)$);

Atunci șirul $\{x_n\}$ converge tare în $\bar{B}$ către x.

Dacă notăm

$$x = T_1(x),$$

atunci T_1 este un operator liniar definit pentru elementele $x \in B$, care satisfac condițiile 1) și 2) și avem relațiile

$$TT_1 = T_1T = T_1^2 = T_1.$$

Demonstrație. Mai întîi vom dovedi egalitatea

$$T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Fie $\{x_{n_i}\}$ subșirul șirului 2) care converge slab către x. Avem

$$\| T(x_{n_i}) - x_{n_i} \| = \left\| \frac{1}{n_i} [T(T + T^2 + \ldots + T^{n_i}) - \right.$$

$$\left. -(T + T^2 + \ldots + T^{n_i})](x) \right\| = \frac{1}{n_i} \| (T^{n_i+1} - T)(x) \| \leqslant \frac{1}{n_i} (\| T^{n_i+1}(x) \| +$$

$$+ \| T(x) \|) \leqslant \| T \| \left\| \frac{T^{n_i}(x)}{n_i} \right\| + \frac{1}{n_i} \| T(x) \|,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{i \to \infty} \| T(x_{n_i}) - x_{n_i} \| = 0.$$

Însă, prin definiție,

$\lim_{i \to \infty} | f(x_{n_i}) - f(\bar{x}) | = 0$, pentru orice funcțională $f \in B^*$ și, datorită continuității operatorului T,

$$\lim_{i \to \infty} | f(T(x_{n_i})) - f(T(\bar{x})) | = 0.$$

Ținînd seamă de ultimele trei relații, din inegalitatea

$$| f(T(\bar{x}) - \bar{x}) | = | f(T(\bar{x}) - T(x_{n_i}) + T(x_{n_i}) - x_{n_i} + x_{n_i} - \bar{x}) | \leqslant$$

$$\leqslant | f(T(\bar{x}) - T(x_{n_i})) | + | f(T(x_{n_i}) - x_{n_i}) | + | f(x_{n_i} - \bar{x}) |,$$

valabilă pentru orice $f \in B^*$, deducem

$$f(T(\bar{x}) - \bar{x}) = 0, \text{ pentru orice } f \in B^*,$$

deci

$$T(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Prin iterație obținem

$$T^n(\bar{x}) = \bar{x}, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Ţinînd seamă acum de aceste egalităţi, avem

$$x_n - \bar{x} = \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(x) - \bar{x} =$$

$$= \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(x - \bar{x})$$

de unde deducem că pentru a arăta convergenţa şirului $\{x_n\}$ către $\bar{x}$ în B, este suficient să demonstrăm că şirul

$$\left\{\frac{1}{n}(T + \ldots + T^n)(x - \bar{x})\right\}_{1 \leqslant n < \infty}$$

converge în B către 0.

Însă această ultimă propoziţie a fost demonstrată în teorema 2 (respectiv în teorema 3), deoarece prin ipoteză $x - \bar{x} \in V(B)$ (respectiv $x - \bar{x} \in V(L)$).

Deci prima parte a teoremei este demonstrată.

Pentru a doua parte, este evident, mai întîi, că T_1 este un operator liniar.

Din egalităţile (2) se deduce succesiv

$$T\,T_1 = T_1$$

$$T^n\,T_1 = T_1$$

$$\frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)\,T_1 = T_1,$$

$$T_1^2 = T_1.$$

Pentru a obţine relaţia

$$T_1\,T = T_1$$

se pleacă de la inegalitatea

$$\left\|\frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)\,T(x) - \frac{1}{n}(T + T^2 + \ldots + T^n)(x)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{n}(T^{n+1}(x) - T(x))\right\| \leqslant \|T\|\left(\frac{\|T^n(x)\|}{n} + \frac{\|x\|}{n}\right).$$

Expresia din prima linie tinde către

$$\|T_1\,T(x) - T_1(x)\|$$

de unde rezultă, deoarece ultima expresie tinde către 0,

$$T_1\,T = T_1.$$

Teorema este astfel demonstrată complet.

T e o r e m a 6 (a doua teoremă ergodică în medie). *Fie T un operator liniar continuu definit pe B și x un element din B (respectiv din L) satisfăcînd următoarele condiții:*

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \| T^n(z) \| = 0,$$

pentru orice $z \in B$ (respectiv pentru orice $z \in L$);

2) $$\left\| \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(z) \right\| \leqslant K \| z \|,$$

pentru orice $z \in B$, constanta K fiind independentă de z și de n;

3) *șirul $\{x_n\}$*, unde

$$x_n = \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(x)$$

conține un subșir slab convergent în B, către un element $\bar{x} \in B$.

Atunci șirul $\{x_n\}$ converge tare în B către $\bar{x}$. Dacă notăm

$$\bar{x} = T_1(x),$$

atunci T_1 este o operație liniară definită pe elementele $x \in B$, care satisfac condițiile 1), 2), 3) și avem relațiile

$$TT_1 = T_1 T = T_1^2 = T_1,$$

$$\| T_1(x) \| \leqslant K \| x \|.$$

D e m o n s t r a ț i e. Întîi demonstrăm, ca și pentru teorema precedentă, egalitățile

$$T^n(\bar{x}) = \bar{x}, \quad (n = 1,2,\ldots),$$

de unde rezultă

$$x_n - \bar{x} = \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(x - \bar{x}).$$

Deci este suficient să demonstrăm că șirul

$$\left\{ \frac{1}{n} (T + T^2 + \ldots + T^n)(x - \bar{x}) \right\}_{1 \leqslant n < \infty}$$

converge în B către 0.

Pentru aceasta este suficient, după teorema 2 (respectiv teorema 4), să avem

$$x - \bar{x} \in \overline{V(B)} \quad \text{(respectiv } x - \bar{x} \in \overline{V(L)}\text{)}.$$

Această ultimă relație rezultă din următoarea egalitate:

$$\left(I - \frac{1}{n_i} (T + T^2 + \ldots + T^{n_i}) \right)(\bar{x}) =$$

$$= (I - T) \left(I + \frac{n_i - 1}{n_i} T + \frac{n_i - 2}{n_i} T^2 + \ldots + \frac{1}{n_i} T^{n_i - 1} \right)(x).$$

Prima parte a acestei egalităţi converge slab în B către $x - \bar{x}$, iar a doua parte aparţine mulţimii $V(B)$ (respectiv $V(L)$), de unde limita $x - \bar{x}$ aparţine mulţimii $\overline{V(B)}$ (respectiv $\overline{V(L)}$), deoarece $\overline{V(B)}$ (respectiv $V(L)$) este şi slab închis.

Continuitatea operatorului T_1, exprimată în ultima inegalitate a teoremei rezultă imediat din condiţia 2).

§ 2. Teoreme de descompunere ergodică

1. Aplicînd a doua teoremă ergodică în medie operatorilor $\frac{1}{\lambda} T$, unde λ este număr complex de modul egal cu unitatea, putem descompune operatorul T într-o sumă de operatori cu proprietăţi remarcabile.

Teorema 1. *Fie T un operator liniar continuu definit pe B şi x un element din B, satisfăcînd următoarele condiţii :*

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \| T^n(z) \| = 0,$$

pentru orice $z \in B$ (respectiv pentru orice $z \in L$);

2) $$\left\| \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\lambda} T + \frac{1}{\lambda^2} T^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda^n} T^n \right)(z) \right\| \leqslant k \| z \|,$$

constanta k fiind independentă de z şi n :

3) *şirul $\{x_n(\lambda)\}$, unde*

$$x_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\lambda} T + \frac{1}{\lambda^2} T^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda^n} T^n \right)(x),$$

conţine, pentru orice număr complex λ de modul 1, un subşir care converge slab în B către un element $\bar{x}(\lambda) \in B$.

Atunci, pentru orice număr complex λ de modul 1, şirul $\{x_n(\lambda)\}$ converge (tare) în B, către $\bar{x}(\lambda)$.

Dacă notăm

$$\bar{x}(\lambda) = T_\lambda(x),$$

atunci T_λ este o operaţie liniară definită pentru elementele $x \in B$ care satisfac condiţiile 1), 2), 3) şi avem relaţiile

$$T_\lambda T = T T_\lambda = \lambda T_\lambda,$$

$$T_\lambda^2 = T_\lambda,$$

$$\| T_\lambda(x) \| \leqslant k \| x \|,$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ implică } T_{\lambda_1} T_{\lambda_2} = 0;$$

$T_\lambda(x) = 0$ pentru orice $x \in B$ dacă şi numai dacă ecuaţia

$$\lambda x - T_\lambda(x) = 0$$

nu are altă soluţie decît $x = 0$.

Demonstrație. Analogă demonstrației teoremei 6, paragraful 1 pînă la ultimele două relații.

Pentru penultima relație avem

$$T_{\lambda_1} T_{\lambda_2}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda_1} T + \frac{1}{\lambda_1^2} T^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_1^n} T^n\right) T_{\lambda_2}(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1} T T_{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1^2} T^2 T_{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1^n} T^n T_{\lambda_2}\right](x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1} T T_{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1^2} T^2 T_{\lambda_2}^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda_1^n} T^n T_{\lambda_2}^n\right](x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} T_{\lambda_2} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} T_{\lambda_2}^2 + \ldots + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} T_{\lambda_2}^n\right](x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n}\right] T_{\lambda_2}(x).$$

Însă

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^i\right| = \frac{\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}\right|}{\left|1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|} \leqslant \frac{2}{\left|1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}.$$

Deoarece am presupus $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i\right] T_{\lambda_2}(x) = 0.$$

Pentru ultima relație, fie λ o valoare pentru care ecuația

$$\lambda x - T_\lambda(x) = 0$$

nu are altă soluție decît $x = 0$. Dacă $x \neq 0$ avem atunci

$$\lambda x - T_\lambda(x) \neq 0$$

și de altă parte, din relația

$$T T_\lambda = \lambda T_\lambda$$

deducem

$$(\lambda I - T)\, T_\lambda(x) = 0.$$

Trebuie deci să avem

$$T_\lambda(x) = 0.$$

Invers, dacă $T_\lambda(x) = 0$ pentru orice $x \in B$, este evident că ecuația

$$\lambda x - T_\lambda(x) = 0$$

nu are decît soluția $x = 0$.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Teorema 2 (teorema generală de descompunere ergodică). *Dacă pentru orice $x \in B$ (respectiv pentru orice $x \in L$) condițiile teoremei 1 sînt îndeplinite, atunci pentru fiecare valoare proprie λ de modul 1 operației T, operația T_λ este o proiecție a lui B pe subspațiul $V^{-1}(0)$ (respectiv a lui L pe $V^{-1}(0) \cap L$).*

Egalitatea

$$T_\lambda(x) = x$$

este verificată dacă și numai dacă

$$\lambda x - T(x) = 0.$$

Dacă $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ este un sistem finit de valori proprii de modul 1 ale operatorului T, atunci operatorul T și iteratele lui se descompun după relația

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_{\lambda_i} + (T')^n,$$

unde

$$T' = T - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_{\lambda_i}.$$

Mai mult, sînt îndeplinite și condițiile următoare:

$$T_{\lambda_i} T' = T' T_{\lambda_i} = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,k);$$

$$TT' = T'T = T'^2;$$

λ este o valoare proprie a operatorului T' dacă și numai dacă este valoare proprie a operatorului T și este diferit de valorile λ_i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Demonstrație. Prima parte a teoremei rezultă imediat din teorema precedentă: într-adevăr, $V_\lambda(T_\lambda(x)) = (\lambda I - T)T_\lambda(x) = 0$, deci $T_\lambda(x) \in V_\lambda^{-1}(0)$ pentru orice $x \in B$ (respectiv pentru orice $x \in L$) și dacă $x \in V_\lambda^{-1}(0)$ (λ fiind valoarea proprie a operatorului T), atunci

$$x = \frac{1}{\lambda} T(x) = \frac{1}{\lambda^2} T^2(x) = \ldots = \frac{1}{\lambda^n} T^n(x),$$

de unde rezultă

$$T_\lambda(x) = x;$$

invers, din ultima egalitate rezultă

$$T(x) = TT_\lambda(x) = \lambda T_\lambda(x) = \lambda x.$$

Fie acum T' definit de egalitatea

$$T' = T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}.$$

Vom demonstra relațiile între T, T' și T_{λ_i}. Avem

$$T_{\lambda_i} T' = T_{\lambda_i} \left(T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) = T_{\lambda_i} T - T_{\lambda_i} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} =$$

$$= \lambda_i T_{\lambda_i} - \lambda_i T_{\lambda_i}^2 = \lambda_i T_{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} = 0$$

(pentru că $T_{\lambda_i} T_{\lambda_j} = 0$ dacă $i \neq j$).
La fel obținem

$$T' T_{\lambda_i} = 0.$$

Mai departe,

$$TT' = T\left(T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) = T^2 - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T T_{\lambda_j} =$$

$$= T^2 - 2T \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} + T \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} =$$

$$= T^2 - 2T \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 T_{\lambda_i}^2 =$$

$$= T^2 - 2T \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j} + \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right)^2 = \left(T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right)^2 = T'^2.$$

De asemenea

$$T'T = \left(T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) T = T^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) T =$$

$$= T^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) T + \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) T =$$

$$= T^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) T + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^2 T_{\lambda_j}^2 =$$

$$= T^2 - 2T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right)^2 = \left(T - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_{\lambda_j}\right)^2 = T'^2.$$

Să presupunem acum că

$$T^{n-1} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n-1} T_{\lambda_j} + (T')^{n-1}.$$

Atunci

$$T^n = TT^{n-1} = T\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n-1} T_{\lambda_j} + (T')^{n-1}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n-1} T T_{\lambda_j} + T(T')^{n-1} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{n-1} T T_{\lambda_j} + TT'(T')^{n-2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n T_{\lambda_j}^2 + T'^2 (T')^{n-2} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n T_{\lambda_j} + (T')^n.$$

Rămîne de demonstrat ultima propoziție din teoremă.

Să presupunem că λ este o valoare proprie a operatorului T și $\lambda \neq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Atunci există un element $x_0 \in B$, astfel ca

$$\lambda x_0 = T(x_0), \quad x_0 \neq 0.$$

Avem

$$T_{\lambda_i}(x_0) = \frac{1}{\lambda} T_{\lambda_i}\, T(x_0) = \frac{\lambda_i}{\lambda}\, T_{\lambda_i}(x_0),$$

de unde rezultă

$$T_{\lambda_i}(x_0) = 0$$

și

$$x_0 = \frac{1}{\lambda} T(x_0) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_{\lambda_i}(x_0) + T'(x_0)\right) = \frac{1}{\lambda} T'(x_0),$$

deci λ este valoare proprie a operatorului T'. Invers, fie λ o valoare proprie a lui T'. Există atunci un element $x_0 \in B$, astfel ca

$$\lambda x_0 = T'(x_0), \quad x_0 \neq 0.$$

Avem

$$T(x_0) = \frac{1}{\lambda} TT'(x_0) = \frac{1}{\lambda} T'^2(x_0) = T'\left(\frac{1}{\lambda} T'(x_0)\right) = T'(x_0) = \lambda x_0$$

adică

$$(\lambda I - T)(x_0) = 0,$$

deci λ este o valoare proprie a operatorului T.

Teorema este astfel complet demonstrată.

2. Particularizînd operatorul T în teoremele precedente, componentele lui au proprietăți și mai speciale. Astfel avem

T e o r e m a 3. *Fie T un operator liniar relativ complet continuu satisfăcînd condiția f) (cap. VIII, § 5) pe Λ, mulțimea numerelor complexe de modul 1.*

Presupunem în plus că:

1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \| T^n(z) \| = 0,$$

pentru orice $z \in B$;

2) $$\left\| \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\lambda} T + \frac{1}{\lambda^2} T^2 + \ldots + \frac{1}{\lambda^n} T^n\right)(z) \right\|_L \leqslant k \| z \|_L,$$

pentru orice λ de modul 1 și $z \in B$, constanta k fiind independentă de z și n;

3) $$\left\| \frac{1}{n}\left(I + \frac{1}{\lambda} T + \ldots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} T^{n-1}\right)(x) \right\| \leqslant k_1 \| x \|,$$

pentru orice $x \in L$, constanta k_1 fiind independentă de x și n.

Atunci iteratele T^n admit o descompunere de forma

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_{\lambda_i} + S^n,$$

unde operatorul S satisface aceleași relații ca operatorul T' din teorema 2 și în plus nu are nici o valoare proprie de modul 1.

Demonstrație. Condițiile 1) și 2) sînt cele din teorema 1. Condiția 3) din teorema 1 este de asemenea îndeplinită, deoarece șirul $\{x_n(\lambda)\}$ este imaginea, prin operația $\frac{1}{\lambda} T$, a unui șir mărginit în L, și prin urmare este relativ compact în B.

De altă parte, operatorul T nu are decît un număr finit de valori proprii de modul 1 (teorema 11, cap. VIII, § 5). Dacă însemnăm aceste valori proprii cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, atunci rezultă descompunerea dată de teoremă.

Teorema 4. *În aceleași ipoteze ca pentru teorema 3, dacă pentru orice valoare proprie λ de modul 1 a operatorului T, operatorul $\frac{1}{\lambda} T$ satisface condiția a) (cap. VIII, § 5), atunci operatorul*

$$C = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_{\lambda_i}$$

este complet continuu în L.

Demonstrație. Condiția a) implică, după cum am văzut în capitolul VIII, paragraful 5, că varietatea soluțiilor ecuației

$$(\lambda I - T)(x) = 0$$

are un număr finit de dimensiuni (teorema 2, cap. VIII, § 5), deci că orice mulțime mărginită a ei este relativ compactă.

Atunci operatorul C, fiind continuu, transformă orice mulțime mărginită într-o mulțime mărginită, deci relativ compactă.

Teorema 5. *Fie T un operator complet continuu satisfăcînd următoarele condiții:*

1) *condiția f) (cap. VIII, § 5) cînd Λ este mulțimea numerelor complexe de modul 1;*

2) *condiția a) (cap. VIII, § 5) pentru operatorii $\frac{1}{\lambda} T$, λ fiind valorile proprii de modul 1 ale operatorului T;*

3) $$\| T^n(x) \| \leqslant M \| x \|,$$

pentru orice $x \in B$, constanta M fiind independentă de x și n;

4) $$\left\| \frac{1}{n} (I + T + \ldots + T^{n-1})(x) \right\|_L \leqslant H \| x \|_L,$$

pentru orice $x \in L$, constanta H fiind independentă de x și n.

Atunci iteratele T^n admit o descompunere de forma

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_{\lambda_i} + S^n,$$

unde operatorul

$$C = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n T_{\lambda_i}$$

este complet continuu în L, iar operatorii S^n $(n = 1,2,\ldots)$ *sînt uniform mărginiți în B:*

$$\| S^n(x) \| \leqslant k \| x \|$$

constanta k fiind independentă de x și n.

Demonstrație. Pînă la ultima propoziție, afirmațiile teoremei rezultă imediat din teoremele precedente. Ultima propoziție este o consecință a condiției 3), deoarece

$$\|S^n(x)\| \leqslant \| T^n(x)\| + \| C(x) \| \leqslant \left(M + \sum_{i=1}^{k} \| T_{\lambda_i} \| \right) \| x \|.$$

Teorema 6. *Fie T un operator relativ complet continuu, satisfăcînd condițiile* 1), 2) *și* 4) *din teorema* 5 *și condițiile următoare*

3′) $$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T^n(z)}{n} \right\| = 0,$$

pentru orice $z \in B$;

3″) $$\| T^n(x) \|_L \leqslant k \| x \|_L,$$

pentru orice $x \in L$, *constanta k fiind independentă de x și n.*

Atunci afirmațiile teoremei 5 *sînt valabile, afară de ultima propoziție, care trebuie înlocuită prin:*

normele operațiilor S sînt mărginite în L:

$$\|S^n(x)\|_L \leqslant k \| x \|_L.$$

Demonstrația este analogă cu aceea a teoremei precedente.

§ 3. Teorema ergodică uniformă

1. Teorema ergodică uniformă se obține prin întărirea teoremelor 5 și 6, din paragraful 2, în condiții mai restrictive.

Vom presupune că T este o operație care satisface condițiile i), ii′), iii), α), β) de la capitolul VIII, paragraful 6 (spațiile L și B satisfăcînd, evident, condițiile cerute în acel paragraf).

Se poate verifica ușor că T satisface atunci condițiile impuse în teoremele paragrafului precedent, deci aceste teoreme sînt valabile în cazul nostru.

Păstrînd notațiile din paragraful precedent, putem enunța și următoarele propoziții:

Propoziția 1. *Operația S, definită de teorema 4, paragraful 2, transformă orice mulțime mărginită în L într-o mulțime relativ compactă în B.*

Demonstrație. Rezultă din faptul că S este suma unei operații relativ complet continue cu o operație complet continuă al cărei contradomeniu are un număr finit de dimensiuni.

Propoziţia 2. *Operaţia S satisface inegalitatea*

$$\| S(x) \|_L \leqslant r \| x \|_L + (R + A) \| x \|,$$

unde r, R sînt constantele din condiţia β) *iar A o constantă pozitivă.*

Demonstraţie. Operaţia C din teoremele paragrafului precedent, avînd contradomeniul cu un număr finit de dimensiuni, rezultă că există o constantă $A > 0$, astfel ca

$$\| C(x) \|_L \leqslant A \| x \|,$$

pentru orice $x \in B$.

Atunci

$$\| S(x) \|_L \leqslant \| T(x) \|_L + \| C(x) \|_L \leqslant$$

$$\leqslant r \| x \|_L + R \| x \| + A \| x \| =$$

$$= r \| x \|_L + (R + A) \| x \|.$$

Mai mult, în condiţiile impuse mai sus operaţiei T, este valabilă

Teorema 1. *Pentru orice $y \in L$ şi pentru orice şir de numere complexe $\{\lambda_n\}$, de modul < 1 şi astfel ca*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda \qquad \text{cu} \qquad |\lambda| = 1,$$

şirul element elor x_n satisfăcînd ecuaţiile

$$(I - \lambda_n S)(x_n) = y$$

este mărginit în L.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întîi că şirul $\{\| x_n \|\}$ este mărginit.

Presupunem contrar, anume că şirul $\{\| x_n \|\}$ nu este mărginit. Atunci există un subşir $\{x_{n_j}\}$, astfel ca

$$\lim_{j \to \infty} \| x_{n_j} \| = \infty .$$

Vom nota, pentru simplificare, j în loc de n_j, de unde rezultă

$$\lim_{j \to \infty} \| x_j \| = \infty .$$

Fie

$$x_j' = \frac{x_j}{\| x_j \|}.$$

Avem

$$(I - \lambda_j S)(x_j') = \frac{y}{\| x_j' \|},$$

de unde obţinem

$$x_j' = \lambda_j S(x_j') + \frac{y}{\| x_j' \|}, \tag{1}$$

deci

$$\| x_j' \|_L \leqslant \| S(x_j') \|_L + \frac{\| y \|_L}{\| x_j' \|} \leqslant$$

$$\leqslant r \| x_j' \|_L + (R + A) \| x_j' \| + \frac{\| y \|_L}{\| x_j' \|} =$$

$$= r \| x_j' \|_L + R + A + \frac{\| y \|_L}{\| x_j' \|}.$$

De aici rezultă inegalitatea

$$\| x_j' \|_L \leqslant \frac{R + A + \frac{\| y \|_L}{\| x_j' \|}}{1 - r}.$$

Ţinînd seama de egalitatea (1) şi de faptul că

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\| y \|_L}{\| x_n \|} = 0,$$

propoziţia 2 ne asigură existenţa unui subşir $\{x_n'\} \subset \{x_n\}$ convergent în B către un element $x' \in L$ (datorită condiţiei j)).

Deoarece normele operaţiilor S^n $(n = 1,2,\ldots)$ sînt mărginite şi în L şi în B, rezultă

$$(I - \lambda S)(x') = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că operaţia S nu are valori proprii de modul 1 (teorema 3, § 2).

Am demonstrat astfel că există o constantă D, astfel încît

$$\| x_n \| \leqslant D \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Procedînd la fel ca mai sus obţinem şi

$$\| x_n \|_L \leqslant \frac{(R + A) D + \| y \|_L}{1 - r},$$

deci şirul $\{x_n\}$ este mărginit în L şi teorema este demonstrată.

Cu ajutorul acestei teoreme demonstrăm

T e o r e m a 2. *Dacă* $|\lambda| = 1$, *operaţia* $(I - \lambda S)^{-1}$ *este definită pe* L *şi este continuă.*

D e m o n s t r a ţ i e. Dacă $|\lambda| < 1$, operaţia $(I - \lambda S)^{-1}$ există în baza teoremei 1 din capitolul VII, paragraful 1.

Fie numărul complex λ astfel încît $|\lambda| = 1$. Atunci există un şir $\{\lambda_n\}$ de numere complexe de modul < 1 şi astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$$

şi un şir de elemente $\{x_n\}$ cu proprietatea

$$(I - \lambda_n S)(x_n) = y.$$

În teorema precedentă am arătat că şirul $\{x_n\}$ este mărginit în L. Atunci, deoarece

$$x_n = \lambda_n S(x_n) + y$$

şi operaţia S este relativ complet continuă, există un subşir $\{x_n'\}$ convergent în B către un element $x \in L$ (datorită condiţiei j)). Elementul acesta satisface, evident, relaţia

$$x = \lambda S(x) + y.$$

Am arătat astfel că relaţia

$$(I - \lambda S)(x) = y$$

are o soluţie pentru orice $y \in L$. Această soluţie este unică, pentru că S nu are valori proprii de modul 1.

Teorema este astfel demonstrată.

Următoarea teoremă este o consecinţă.

T e o r e m a 3. *Există două constante M şi h astfel încît*

$$\| S^n(x) \|_L \leqslant \frac{M}{(1+h)^n} \| x \|_L \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

pentru orice $x \in L$.

D e m o n s t r a ţ i e. Inversul $(I - \lambda S)^{-1}$ a cărui existenţă am dovedit-o în teorema precedentă este o funcţie olomorfă de λ (cu valori în algebra operatorilor) într-un cerc

$$|\lambda| < 1 + 2h \quad \text{cu} \quad h > 0$$

şi seria

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n S^n$$

este absolut convergentă în cercul

$$|\lambda| \leqslant 1 + h.$$

Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \| \lambda^n S^n \|_L = 0,$$

pentru orice λ din acest cerc.

De aici rezultă existenţa unei constante M, astfel încît

$$\| \lambda^n S^n \|_L \leqslant M,$$

ceea ce implică afirmaţia teoremei, dacă luăm $\lambda = 1 + h$.

2. Adăugînd teorema 3 la teoremele paragrafului precedent, în condiţiile acestui paragraf, obţinem

T e o r e m a 4 (*teorema ergodică uniformă*). *Fie L şi B două spaţii satisfăcînd condiţiile impuse în capitolul* VIII, *paragraful* 5 *şi condiţia j) din capitolul* VIII, *paragraful* 6. *Fie, mai departe, T o operaţie satisfăcînd condiţiile* i), ii'), iii), α), β) *din capitolul* VIII, *paragraful 6.*

Atunci

1) *Operația T nu are decît un număr finit de valori proprii de modul* 1, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

2) *Iteratele operației T se descompun sub forma*

$$T^n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n \, T_i^n + S^n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

unde T_i $(i = 1,2,\ldots, k)$ sînt operații liniare și continui (în L) definite pe L și avînd drept contradomenii spații de dimensiune finită, iar S este o operație liniară și continuă definită pe L și cu valori în L.

3) *Sînt valabile următoarele relații*

$$T_i^2 = T_i, \quad T_i T_j = 0, \quad (i \neq j), \quad T_i S = S T_i = 0.$$

4) *Există două constante pozitive M și h astfel încît*

$$\| S^n \|_L \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3. Considerațiile anterioare (inclusiv teorema ergodică uniformă) se pot extinde la o clasă mai vastă de operații T, pentru care există un număr natural $m \geqslant 1$, astfel încît T^m satisface condițiile i), ii') iii'), β) (T satisfăcînd condiția α)).

Demonstrațiile sînt aceleași ca în cazul $m = 1$.

§ 4. Alte rezultate

1. În acest paragraf reproducem, fără demonstrații, rezultatele obținute de cercetătorii sovietici în frunte cu M. G. Krein în legătură cu operatorii complet continui pozitivi.

Pentru demonstrații și pentru o cercetare mai aprofundată trimitem la lucrarea, de mai multe ori citată, a lui M. G. Krein și M. A. Rutman [187].

Terminologia întrebuințată de noi este puțin diferită de a autorilor, întrucît, consecvent cu capitolele anterioare, ne referim la structura de ordonare.

Presupunem că sîntem într-un spațiu Banach real ordonat, în care mai este definită și o a doua normă, față de care spațiul nu este neapărat complet. Notăm a doua normă cu $\mu(x)$.

Teorema 1. *Fie B un spațiu Banach ordonat și $B_+ = \overline{B}_+$, int $B_+ \neq 0$. Considerăm un operator T complet continuu și pozitiv, avînd un element propriu v în B_+. Operatorul T se descompune sub forma*

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i T_i + S,$$

unde:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \| S^n \|^{1/n} < 1$;

2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_i (i = 2, \ldots, k)$ sînt numere complexe de *modul* 1, *diferite între ele;*

3) T_i $(i = 1,2,\ldots, k)$ *sînt proiecţii ale lui* B *pe subspaţii de dimensiune finită şi verifică relaţiile*

$$T_i T = T T_i = \lambda_i T_i, \quad (i = 1,\ldots, k),$$

$$T_1 v = v;$$

4) *fiecare din operatorii*

$$T_1, \; U_m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^m T_i$$

asă invariantă mulţimea int B_+.

Teorema 2. *Fie* B *o latice Banach,* $B_+ = \bar{B}_+$ *şi* T *un operator complet continuu pozitiv. Dacă*

$$\mu(T(x)) \leqslant \mu(x),$$

atunci sau

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} < 1,$$

sau T *se descompune sub forma*

$$T = T_1 + S, \qquad (T_1 S = S T_1 = 0),$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} \| S^n \|^{1/n} < 1,$$

iar T_1 *este un permutator cu bază conţinută corect în* B_+.

Teorema 3. *Fie* B *o latice Banach,* $B_+ = \bar{B}_+$, int $B_+ \neq 0$ *şi* T *un operator complet continuu pozitiv, avînd un element propriu* v *în* B_+.

Atunci operatorul T *se descompune sub forma*

$$T = T_1 + S, \qquad (T_1 S = S T_1 = 0),$$

unde

$$\lim_{n\to\infty} \| S^n \|^{1/n} < 1.$$

Valorile proprii de modul 1 *ale operatorului* T *sînt rădăcinile unei ecuaţii algebrice de forma*

$$(z^\alpha - 1)(z^\beta - 1)\ldots(z^\tau - 1) = 0.$$

Mulţimile elementelor proprii ale operatorilor T *şi* T^* *au baze conţinute corect în* B_+, *respectiv în* B_+^*. *Dacă aceste baze sînt* $(v_1, \ldots, v_r)$, *respectiv* $(g_1, \ldots, g_r)$, *sînt verificate relaţiile*

$$g_i(v_j) = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1,2,\ldots, r),$$
$$\inf(g_i, g_j) = 0, \qquad (i \neq j).$$

Am întrebuinţat următorul termen: o mulţime $x_1, \ldots, x_n$ este *conţinută corect* în B_+, dacă orice combinaţie liniară $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ este conţinută în B_+, cînd toţi a_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ sînt pozitivi şi numai atunci.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Literatura asupra teoremelor ergodice este foarte bogată [31], [53], [63] [165], [76], [77], [131], [138], [139], [188] și [198].

Forma în care sînt redate aici este aceea din lucrarea [198] de G. Marinescu, unde sînt studiate teoremele ergodice în medie în spații mai generale, cvasi-normate. Teorema ergodică uniformă pentru clase speciale de operații relativ complet continue, dar nu complet continue, cu aplicații la teoria probabilităților, a fost stabilită de C. T. Ionescu Tulcea și G. Marinescu [138], [139].

Un moment hotărîtor în teoria ergodică, în spații funcționale, îl constituie lucrările matematicienilor sovietici N. Krîlov și N. Bogoliubov, care au stabilit-o într-un caz particular, cu aplicații importante la studiul sistemelor dinamice [188].

2. Teoremele asupra operatorilor complet continui pozitivi sînt demonstrate în [187] prin metode proprii, diferite de cele întrebuințate de noi. Aceste teoreme se disting prin rezultatele foarte profunde asupra valorilor și elementelor proprii ale unor clase importante de operatori complet continui.

CAPITOLUL X

METODA ECUAȚIILOR APROPIATE

Metodele de rezolvare prin aproximări succesive ale analizei sînt în general cele mai efective metode din teoria ecuațiilor funcționale.

Ele sînt însă prezentate în diferitele ramuri ale analizei, prin mijloace diferite.

Matematicianul sovietic L. V. Kantorovici a unificat toate aceste metode într-una singură, pe care o numim metoda ecuațiilor apropiate. Aceasta constă în căutarea soluțiilor unor ecuații mai simple decît cea dată, însă așa fel ca aceste soluții să aproximeze, în măsura cerută de problemă, soluția exactă.

§ 1. Existența soluțiilor apropiate

1. Fie E și $\widetilde{E}$ două spații vectoriale normate, $\widetilde{E}$ fiind și complet. Presupunem că spațiul E conține un subspațiu E' izomorf algebric și topologic cu $\widetilde{E}$, izomorfismul fiind realizat de o operație φ_0:

$$\widetilde{E} = \varphi_0(E'), \quad E' = \varphi_0^{-1}(\widetilde{E}).$$

Mai presupunem că operația φ_0 se poate prelungi pe tot spațiul E, astfel ca

$$\widetilde{E} = \varphi(E).$$

Considerăm ecuația

$$y = x - \lambda T(x), \tag{1}$$

unde $T(x)$ este un operator liniar și continuu definit pe E, și, paralel cu ea, ecuația

$$\widetilde{y} = \widetilde{x} - \lambda \widetilde{T}(\widetilde{x}), \tag{2}$$

unde $\widetilde{T}(\widetilde{x})$ este un operator liniar și continuu definit pe $\widetilde{E}$.

Dacă notăm

$$V(x) = x - T(x) = (I - T)(x),$$
$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} - \widetilde{T}(\widetilde{x}) = (I - \widetilde{T})(\widetilde{x}),$$

ecuațiile (1) și (2) se mai scriu

$$y = V(x), \tag{1'}$$

$$\tilde{y} = \tilde{V}(\tilde{x}). \tag{2'}$$

D e f i n i ț i a 1. *Spunem că ecuația (2) este o ecuație apropiată ecuației* (1) *sau că operatorul* $\tilde{T}$ *este apropiat operatorului* T, *dacă este îndeplinită următoarea condiție*

$$a) \qquad \| \varphi(T(x')) - \tilde{T}(\varphi(x')) \| \leqslant \varepsilon \| x' \|,$$

pentru orice $x' \in E'$.

Soluția ecuației (1) *o vom numi soluție exactă, iar pe cea a ecuației* (2), *soluție apropiată.*

P r o p o z i ț i e. *Condiția a) poate fi scrisă și sub forma a')*

$$\| \varphi(V(x')) - \tilde{V}(\varphi(x')) \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid \| x' \|.$$

D e m o n s t r a ț i e. Avem

$$\varphi(V(x')) = \varphi(x') - \lambda \varphi(T(x')),$$

$$\tilde{V}(\varphi(x')) = \varphi(x') - \lambda \tilde{T}(\varphi(x')),$$

deci

$$\varphi(V(x')) - \tilde{V}(\varphi(x')) = \lambda [\tilde{T}(\varphi(x')) - \varphi(T(x'))]$$

și invers,

$$\varphi(T(x')) - \tilde{T}(\varphi(x')) = \frac{1}{\lambda} [\tilde{V}(\varphi(x') - \varphi(V(x'))].$$

D e f i n i ț i a 2. *Spunem că mulțimea* $T(E)$ *este aproximată de spațiul* E', *dacă pentru orice* $x \in E$ *există* $x' \in E'$, *astfel ca*

$$b) \qquad \| T(x) - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \| x \|.$$

2. Existența unei soluții apropiate în ipoteza existenței unei soluții exacte unice, ne este dată de

T e o r e m a 1. *Cu notațiile de mai sus, presupunem că sînt îndeplinite condițiile a) și b). Atunci, dacă operatorul* V *are invers și dacă*

$$q = (\| \varphi \| \| V \| \mid \lambda \mid \varepsilon_1 + \mid \lambda \mid \varepsilon + \mid \lambda \mid {}^2\varepsilon \varepsilon_1) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| < 1, \tag{3}$$

ecuația (2) are o soluție $\tilde{x}$ pentru orice $\tilde{y} \in \tilde{E}$ și

$$\| \tilde{x} \| \leqslant \frac{(1 + \mid \lambda \mid \varepsilon_1) \| V^{-1} \| \| \varphi \| \| \varphi_0^{-1} \|}{1 - q} \| \tilde{y} \|. \tag{4}$$

D e m o n s t r a ț i e. Construim soluția sub forma unei serii absolut convergente,

$$\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{x}_n,$$

unde elementele $x_1, x_2, .., x_n, ...$ se definesc astfel: notăm

$$\widetilde{y}_0 = \widetilde{y}, \quad y_0 = \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\widetilde{y}_0), \tag{5}$$
$$z = V^{-1}(\lambda T(y_0)\ );$$

datorită condiției b), există un element $x' \in E'$, astfel ca

$$\| T(z + y_0) - \frac{x'}{\lambda} \| \leqslant \varepsilon_1 \| z + y_0 \|; \tag{6}$$

elementul $\widetilde{x}_1$ va fi

$$\widetilde{x}_1 = \varphi(x' + y_0);$$

mai departe, notăm

$$\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_0 - \widetilde{V}(\widetilde{x}_1), \quad y_1 = \varphi_0^{-1}(\widetilde{y}_1)$$

și construim elementul $\widetilde{x}_2$ prin același procedeu întrebuințat pentru $\widetilde{x}_1$, ș.a.m.d.,

$$\widetilde{y}_n = \widetilde{y}_{n-1} - \widetilde{V}(\widetilde{x}_n) \text{ etc.}$$

Șirurile $\{\widetilde{x}_n\}$ și $\{\widetilde{y}_n\}$ satisfac următoarele inegalități:

$$\| \widetilde{x}_n \| \leqslant M q^{n-1} \| \widetilde{y}_0 \|,$$
$$\| \widetilde{y}_n \| \leqslant q^n \| \widetilde{y}_0 \|.$$

Într-adevăr, din (5) deducem

$$z - \lambda T(z) = V(z) = V\, V^{-1}(\lambda T(y_0)\ ) = \lambda T(y_0),$$

de unde obținem

$$z = \lambda T(z + y_0). \tag{7}$$

Atunci inegalitatea (6) se mai scrie

$$\| z - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \mid \lambda \mid \| z + y_0 \|. \tag{8}$$

însă

$$V(z + y_0) = z + y_0 - \lambda T(z + y_0) = y_0$$

sau

$$z + y_0 = V^{-1}(y_0),$$

de unde rezultă

$$\| z + y_0 \| \leqslant \| V^{-1} \| \cdot \| y_0 \|. \tag{9}$$

Introducînd în (8), obținem

$$\| z - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \mid \lambda \mid \| V^{-1} \| \ \| y_0 \|. \tag{10}$$

De altă parte

$$\| \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) - \widetilde{y}_0 \| \leqslant \| \widetilde{V}(\varphi(x' + y_0)) - \varphi(V(x' + y_0)) \| + \| \varphi(V(x' + y_0)) - \varphi(y_0) \| =$$

$$= \| \widetilde{V}(\varphi(x' + y_0)) - \varphi(V(x' + y_0)) \| + \| \varphi(\lambda T(y_0)) - \varphi(V(x')) \|$$

de unde, ținînd seama de a') și de definiția lui z,

$$\| \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) - \widetilde{y}_0 \| \leqslant \varepsilon | \lambda | \| x' + y_0 \| + \| \varphi(V(z)) - \varphi(V(x')) \| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon | \lambda | \| x' + y_0 \| + \| \varphi \| \| V \| \| z - x' \|.$$

Din (8) și (9) deducem

$$\| x' + y_0 \| \leqslant \| z + y_0 \| + \| z - x' \| \leqslant (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| y_0 + z \| \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| y_0 \|,$$

deci, ținînd seamă și de (10),

$$\| \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) - \widetilde{y}_0 \|$$

$$\leqslant \varepsilon | \lambda | (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| y_0 \| +$$

$$+ \| \varphi \| \| V \| \varepsilon_1 | \lambda | \| V^{-1} \| \| \widetilde{y}_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon | \lambda | (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{y}_0 \| +$$

$$+ \| \varphi \| \| V \| \varepsilon_1 | \lambda | \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{y}_0 \| =$$

$$= (\varepsilon | \lambda | + \varepsilon \varepsilon_1 | \lambda |^2 + \varepsilon_1 | \lambda | \| \varphi \| \| V \|) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \|$$

$$\| \widetilde{y}_0 \| = \widetilde{q} \| \widetilde{y}_0 \|.$$

Am arătat astfel că

$$\| \widetilde{y}_1 \| = \| \widetilde{y}_0 - \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) \| \leqslant q \| \widetilde{y}_0 \|$$

și, de altă parte,

$$\| \widetilde{x}_1 \| = \| \varphi(x' + y_0) \| \leqslant \| \varphi \| (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{y}_0 \| = M \| \widetilde{y}_0 \|$$

unde

$$M = \| \varphi \| (1 + \varepsilon_1 | \lambda |) \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \|.$$

Mai departe,

$$\| \widetilde{x}_2 \| \leqslant M \| \widetilde{y}_1 \| \leqslant Mq \| \widetilde{y}_0 \|,$$

$$\| \widetilde{y}_2 \| \leqslant q \| \widetilde{y}_1 \| \leqslant q^2 \| \widetilde{y}_0 \|$$

$$\| \widetilde{x}_n \| \leqslant M q^{n-1} \| \widetilde{y}_0 \|, \tag{11}$$

$$\| \widetilde{y}_n \| \leqslant q^n \| \widetilde{y}_0 \|. \tag{12}$$

Inegalitatea (11) ne arată că seria

$$\widetilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{x}_n$$

este absolut convergentă.

Considerăm acum expresia

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 + \ldots + \widetilde{x}_n) = \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) + \widetilde{V}(\widetilde{x}_2) + \ldots + \widetilde{V}(\widetilde{x}_n) =$$
$$= \widetilde{y}_0 - \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_1 - \widetilde{y}_2 + \ldots + \widetilde{y}_{n-1} - \widetilde{y}_n = \widetilde{y}_0 - \widetilde{y}_n.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obținem

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) = \widetilde{y}_0 = \widetilde{y},$$

deoarece (12) ne dă

$$\lim_{n\to\infty} \| \widetilde{y}_n \| = 0.$$

Tot din inegalitatea (11) deducem

$$\| \widetilde{x} \| \leqslant \frac{M}{1-q} \| \widetilde{y}_0 \| = \frac{M}{1-q} \| \widetilde{y} \|$$

și teorema este complet demonstrată.

3. Teorema 1 are o formulare mai precisă și demonstrația mai simplă, dacă se întărește condiția a), înlocuindu-se prin a_1)

a_1) $$\| \varphi(T(x')) - \widetilde{T}(\varphi(x)) \| \leqslant \varepsilon \| x \|,$$

pentru orice $x \in E$.

Putem enunța atunci

Teorema 2. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* a_1), b)

și

$$q_1 = \varepsilon \mid \lambda \mid \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| < 1,$$

atunci ecuația (2) *are o soluție unică* $\widetilde{x}$ *pentru orice* $\widetilde{y} \in \widetilde{E}$ *și*

$$\| \widetilde{x} \| \leqslant \frac{\| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \varphi \|}{1-q_1} \| \widetilde{y} \|.$$

Demonstrație. Condiția a_1) este echivalentă cu

$$\| \varphi T - \widetilde{T} \varphi \| \leqslant \varepsilon$$

sau

$$\| \varphi V - \widetilde{V} \varphi \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid.$$

Din ultima inegalitate deducem

$$\| I - \widetilde{V} \varphi V^{-1} \varphi_0^{-1} \| = \| (\varphi V - \widetilde{V} \varphi) V^{-1} \varphi_0^{-1} \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \| = q_1,$$

de unde rezultă existența operatorului

$$(\widetilde{V} \varphi V^{-1} \varphi_0^{-1})^{-1} = U^{-1}$$

și

$$\| U^{-1} \| \leqslant \frac{1}{1-q_1}.$$

Din egalitatea

$$\widetilde{V}\varphi V^{-1}\varphi_0^{-1}U^{-1} = U\,U^{-1} = I$$

deducem existența operatorului

$$\widetilde{V}^{-1} = \varphi V^{-1}\varphi_0^{-1}U^{-1}$$

și

$$\| \widetilde{V}^{-1} \| \leqslant \| \varphi V^{-1}\varphi_0^{-1} \| \cdot \| U^{-1} \| \leqslant \frac{\| \varphi V^{-1}\varphi_0^{-1} \|}{1-q_1} \leqslant \frac{\| \varphi \| \| V^{-1} \| \| \varphi_0^{-1} \|}{1-q_1}.$$

Cum existența operatorului V^{-1} este echivalentă cu existența unei soluții unice a ecuației (2) pentru orice $\widetilde{y} \in E$, teorema este demonstrată.

4. Existența operatorului V^{-1} poate fi asigurată și în condițiile teoremei 1, dacă se mai impune și condiția

α) *existența unei soluții a ecuației* (2) *pentru orice* $\widetilde{y} \in \widetilde{E}$ *implică unicitatea acestei soluții.*

În particular, condiția α) este verificată dacă operatorul T este relativ complet continuu și satisface condiția *b*) din capitolul VIII, paragraful 5.

5. Soluția apropiată a ecuației (1) se poate obține într-o formă mai interesantă, dacă se face următoarea schimbare de variabilă:

$$x = y + z \tag{13}$$

Atunci

$$V(z) = z - \lambda T(z) = x - y - \lambda T(x) + \lambda T(y) = \lambda T(y).$$

Dacă notăm

$$\lambda T(y) = y_1,$$

z este dat de ecuația

$$V(z) = y_1. \tag{14}$$

Paralel cu această ecuație, vom considera și ecuația apropiată ei,

$$\widetilde{V}(\widetilde{z}) = \lambda\varphi T(y) = \varphi(y_1). \tag{15}$$

Soluția apropiată a ecuației (1) se poate pune astfel sub forma

$$x_1 = y + \varphi_0^{-1}(\widetilde{z}) = y + \lambda\varphi_0^{-1}\widetilde{V}^{-1}\varphi T(y). \tag{16}$$

6. Existența soluției exacte nu se poate deduce, prin metoda expusă aici, din existența soluției apropiate. Însă, în anumite condiții, se poate demonstra existența operatorului invers la stînga pentru operatorul V. Avem astfel

Teorema 3. *Dacă există operatorul invers* $\widetilde{V}^{-1}$ *și sînt satisfăcute condițiile a) și b) și dacă*

$$r = |\lambda|\varepsilon_1(1 + \| \varphi V \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \|) + 2\varepsilon |\lambda| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| < 1$$

atunci operatorul V are un invers la stînga și

$$\| V^{-1} \| \leqslant \frac{\| \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi \| + 1 + \| \varphi V \| \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \|}{1 - r}.$$

Demonstrație. Fie x^* o soluție a ecuației (1). Datorită condiției *b*) există un element $x' \in E'$, astfel ca

$$\| T(x^*) - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \| x^* \|.$$

De aici deducem

$$\| x^* - \lambda x' \| = \| \lambda T(x^*) + V(x^*) - \lambda x' \| \leqslant \varepsilon_1 | \lambda | \| x^* \| + \| V(x^*) \|$$

sau

$$\| x^* - \lambda x' \| \leqslant \eta \| x \|, \tag{17}$$

unde

$$\eta = \varepsilon_1 | \lambda | + \frac{\| V(x^*) \|}{\| x^* \|}. \tag{18}$$

Ecuația apropiată corespunzătoare ecuației exacte

$$V(x) = V(x^*)$$

este

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) = \varphi V(x^*)$$

și are soluția

$$\widetilde{x}_0 = \widetilde{V}^{-1} \varphi V(x).$$

Fie de asemenea $\widetilde{x}_1$ soluția ecuației

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) = \varphi V(\lambda x')$$

Din relațiile

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_0) = \varphi V(x^*),$$

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_1) = \varphi V(\lambda x')$$

deducem

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_0 - \widetilde{x}_1) = \varphi V(x^* - \lambda x'),$$

de unde obținem

$$\| \widetilde{x}_0 - \widetilde{x}_1 \| \leqslant \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \| \| x^* - \lambda x' \| \leqslant \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \| \eta \| x^* \| \tag{19}$$

și

$$\| \varphi_0^{-1}(x_0) - \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\widetilde{x}_1) \| \leqslant \eta \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \| \| x^* \|. \tag{20}$$

De altă parte, din relația

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_1) = \varphi V(\lambda x')$$

deducem, ținînd seama de condiția *a'*),

$$\| \widetilde{V}(\varphi(\lambda x')) - \widetilde{V}(\widetilde{x}_1) \| = \| \widetilde{V} \varphi(\lambda x') - \varphi V(\lambda x') \| \leqslant \varepsilon | \lambda | \| \lambda x' \|$$

și de aici

$$\| \varphi(\lambda x') - \widetilde{x}_1 \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \lambda x' \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid (1+\eta) \| \widetilde{V}^{-1} \| \| x^* \| \quad (21)$$

sau

$$\| \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - \lambda x' \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid (1+\eta) \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| x^* \| . \quad (22)$$

Inegalitățile (17), (20) și (22) ne dau

$$\| x^* - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \| x^* - \lambda x' \| + \| \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - \lambda \widetilde{x}' \| + \| \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_0^{-1}(x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \eta) \| x^* \| + \varepsilon(1+\eta) \mid \lambda \mid \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| x^* \| +$$

$$+ \eta \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \| \| x^* \| .$$

Observînd că în (17) putem lua $\eta \leqslant 1$ (pentru că elementul $x' = 0$ verifică întotdeauna relația (17), putem scrie

$$\| x^* - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0) \| \leqslant \{ 2\varepsilon \mid \lambda \mid \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| +$$

$$+ \left(\varepsilon_1 \mid \lambda \mid + \frac{\| V(x^*) \|}{\| x^* \|} \right) (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|) \} \| x^* \|$$

sau

$$\| x^* - \varphi_0^{-1} \widetilde{V} \varphi V(x^*) \| \leqslant \{ 2\varepsilon \mid \lambda \mid \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| +$$

$$+ \left(\varepsilon_1 \mid \lambda \mid + \frac{\| V(x^*) \|}{\| x^* \|} \right) (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|) \} \| x^* \| .$$

De aici rezultă

$$\| x^* \| \leqslant \| \varphi_0^{-1} \widetilde{V} \varphi \| \| V(x^*) \| + 2\varepsilon \mid \lambda \mid \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| x^* \| +$$

$$+ \varepsilon_1 \mid \lambda \mid (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|) \| x^* \| +$$

$$+ (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|) \| V(x^*) \|$$

și deci

$$\| V(x^*) \| \geqslant \frac{1 - \varepsilon_1 \mid \lambda \mid (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|) - 2\varepsilon \mid \lambda \mid \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \|}{\| \varphi_0^{-1} \widetilde{V} \varphi \| + 1 + \| \varphi_0^{-1} \| \| \widetilde{V}^{-1} \| \| \varphi V \|} \| x^* \|$$

adică

$$\| V(x^*) \| \geqslant c \| x^* \|$$

cu $c > 0$.

Ultima inegalitate ne dovedește existența operatorului, invers la stînga, V^{-1} și inegalitatea

$$\| V^{-1} \| \leqslant \frac{1}{c} .$$

§ 2. Aproximarea soluției exacte

1. În paragraful precedent am arătat existența unei soluții apropiate presupunînd că există soluția exactă.

Acum vom căuta să stabilim în ce măsură este aproximată soluția exactă de cea apropiată. Aceasta depinde de felul cum este aproximat elementul y (din ecuația (1), § 1) prin elemente din spațiul E', ceea ce se poate exprima printr-o condiție de forma $c)$ $\|y - y'\| \leqslant \varepsilon_2 \|y\|$, cu $y' \in E'$.

Este evident că pentru orice $y' \in E'$ există un ε_2, astfel încît condiția $c)$ să fie îndeplinită. Din cele ce urmează vom vedea că este important ca, pentru ε_2 suficient de mic, să existe $y' \in E'$ astfel încît să fie îndeplinită condiția $c)$.

2. Gradul de aproximare al soluției exacte prin cea apropiată este dat, în funcție de soluția exactă, de

T e o r e m a 1. *Presupunem că sînt îndeplinite condițiile* $a)$, $b)$*), $c)$ *și că există operatorul* $\widetilde{V}^{-1}$. *Fie* x^* *soluția ecuației* (1), *din paragraful* 1 *și* x_0 *soluția corespunzătoare a ecuației* (2), *paragraful* 1. *Atunci este verificată următoarea inegalitate*

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \{2\varepsilon |\lambda| \|\varphi_0^{-1}\| \|\widetilde{V}^{-1}\| + (\varepsilon_1 |\lambda| + \varepsilon_2 \|V\|)(1 +$$

$$+ \|\varphi V\| \|\varphi_0^{-1}\| \|\widetilde{V}^{-1}\|)\} \|x^*\| = p \|x^*\|.$$

D e m o n s t r a ț i e. În primul rînd, din condițiile $b)$ și $c)$ deducem gradul de aproximare al soluției exacte x^* prin elemente din E'. Într-adevăr, datorită condiției $b)$ există un element $x' \in E'$, astfel ca

$$\|T(x^*) - x'\| \leqslant \varepsilon_1 \|x^*\|$$

și atunci

$$\|x^* - (\lambda x' + y')\| \leqslant \|y - y'\| + \|\lambda T(x^*) - \lambda x'\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_2 \|y\| + \varepsilon_1 |\lambda| \|x^*\| \leqslant (\varepsilon_1 |\lambda| + \varepsilon_2 \|V\|) \|x^*\|.$$

Dacă notăm

$$\lambda x' + y' = x''$$

$$\varepsilon_1 |\lambda| + \varepsilon_2 \|V\| = \eta,$$

putem scrie

$$\|x^* - x''\| \leqslant \eta) \|x^*\|. \tag{1}$$

Fie acum $\widetilde{x}_1$ soluția ecuației

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}) = \varphi(V(x'')).$$

Întrucît $\widetilde{x}_0$ este soluția ecuației (2), din paragraful 1, avem

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_0) = \varphi(V(x^*)). \tag{2}$$

*) Condițiile $a)$, $b)$ sînt din paragraful precedent.

Aceasta, împreună cu

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_1) = \varphi(V(x'')), \tag{3}$$

ne dă

$$\widetilde{V}(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_0) = \varphi(V(x^* - x'')),$$

de unde deducem

$$\|\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_0\| \leqslant \|\widetilde{V}^{-1}\| \cdot \|\varphi V\| \cdot \eta \cdot \|x^*\| \tag{4}$$

și

$$\|\varphi_0^{-1}\widetilde{x}_1 - \varphi_0^{-1}\widetilde{x}_0\| \leqslant \eta)\,\|\varphi_0^{-1}\| \cdot \|\widetilde{V}^{-1}\| \cdot \|\varphi V\| \cdot \|x^*\|. \tag{5}$$

Din egalitatea (3) deducem, ținînd seama de condiția a'), din paragraful 1,

$$\|\widetilde{V}(\varphi(x'')) - \widetilde{V}(\widetilde{x}_1)\| = \|\widetilde{V}(\varphi(x'')) - \varphi(V(x''))\| \leqslant \varepsilon\,|\,\lambda\,|\,\|x''\|$$

și de aici,

$$\|\varphi(x'') - \widetilde{x}_1\| \leqslant \varepsilon\,|\,\lambda\,|\,\|\widetilde{V}^{-1}\| \cdot \|x''\| \leqslant \varepsilon\,|\,\lambda\,|\,(1+\eta)\,\|V^{-1}\| \cdot \|x^*\|,$$

sau

$$\|\varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - x''\| \leqslant \varepsilon\,|\,\lambda\,|\,(1+\eta)\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\widetilde{V}^{-1}\| \cdot \|x^*\|. \tag{6}$$

Inegalitățile (1), (5) și (6) ne dau

$$\|x'' - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\| \leqslant \|x^* - x''\| + \|\varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - x''\| +$$

$$+ \|\varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_1) - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\| \leqslant \eta\,\|x^*\| +$$

$$+ \varepsilon\,|\,\lambda\,|\,(1+\eta)\,\|\varphi_0^{-1}\| \cdot \|\widetilde{V}^{-1}\|\,\|x^*\| + \eta\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\widetilde{V}^{-1}\|\,\|\varphi V\| \cdot \|x^*\|.$$

Observînd că în (1) putem lua $\eta = 1$ (pentru că elementul $x'' = 0$ verifică întotdeauna relația (1)), putem scrie

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}(x_0)\| \leqslant \{2\varepsilon\,|\,\lambda\,|\,\|\varphi_0^{-1}\|\,\|\widetilde{V}^{-1}\| +$$

$$+ \eta\,(1 + \|\varphi_0^{-1}\|\,\|\widetilde{V}^{-1}\|\,\|\varphi V\|)\}\,\|x^*\|$$

adică tocmai inegalitatea din teorema 1.

3. Gradul de aproximare al soluției exacte prin cea apropiată poate fi obținut și în funcție de soluția apropiată. Avem astfel

T e o r e m a 2. *În condițiile teoremei* 1, *este valabilă inegalitatea*

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\| \leqslant \frac{p}{1-p}\,\|\varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\|.$$

D e m o n s t r a ț i e. Teorema 1 ne dă

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}(\widetilde{x}_0)\| \leqslant p\,\|x^*\|.$$

Avem însă, evident,

$$\| x^* \| \leqslant \| x^* - \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \| + \| \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \|,$$

de unde deducem

$$\| x^* - \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \| \leqslant p (\| x^* - \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \| + \| \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \|)$$

sau

$$(1-p) \| x^* - \varphi_0^{-1}(\tilde{x}_0) \| \leqslant p \| \varphi_0^{-1}(x_0) \|.$$

4. Dacă soluția apropiată este definită de relația (16) din paragraful 1 aproximația este și mai precisă, cum se poate vedea din

Teorema 3. *Presupunem că există operatorul* $\tilde{V}^{-1}$ *și că soluția apropiată* x_1 *a ecuației* (1), *paragraful* 1, *este dată de relația* (16), *paragraful* 1. *Atunci este valabilă inegalitatea*

$$\| x^* - x_1 \| \leqslant \{ \| \varphi_0^{-1} \| \, \| \tilde{V}^{-1} \| [| \lambda | (\| T \| + \varepsilon_1) \varepsilon + \varepsilon_1 \| \varphi V \|] + \varepsilon_1 \} | \lambda | \, \| x^* \| =$$

$$= p' \| x^* \|.$$

Demonstrație. Soluția exactă a ecuației (14), paragraful 1, este

$$z = \lambda T(z) + \lambda T(y) = \lambda T(x^*).$$

Datorită condiției b), paragraful 1, există $z' \in E'$, astfel ca

$$\| z - z' \| \leqslant | \lambda | \, \varepsilon_1 \| x^* \|.$$

Fie $\tilde{z}_1$ soluția ecuației

$$\tilde{V}(\tilde{z}_1) = \varphi V(z').$$

Atunci, întrucît

$$\tilde{V}(\tilde{z}) = \varphi(y_1) = \varphi V(z),$$

obținem

$$\tilde{V}(\tilde{z} - \tilde{z}_1) = \varphi V(z - z'),$$

de unde deducem

$$\| \tilde{z} - \tilde{z}_1 \| \leqslant \| \tilde{V}^{-1} \| \, \| \varphi V \| \, \| z - z' \| \leqslant \| \tilde{V}^{-1} \| \, \| \varphi V \| \, | \lambda | \, \varepsilon_1 \| x^* \|$$

și

$$\| \varphi_0^{-1} \tilde{z} - \varphi_0^{-1} \tilde{z}_1 \| \leqslant \| \varphi_0^{-1} \| \, \| \tilde{V}^{-1} \| \, \| \varphi V \| \, | \lambda | \, \varepsilon_1 \| x^* \|.$$

De altă parte, în mod analog ca pentru teorema 1, obținem

$$\| \varphi z' - \tilde{z}_1 \| \leqslant | \lambda | \, \varepsilon \| \tilde{V}^{-1} \| \, \| z' \| \leqslant | \lambda | \, \varepsilon \| \tilde{V}^{-1} \| (\| z \| + | \lambda | \, \varepsilon_1 \| x^* \|) \leqslant$$

$$\leqslant | \lambda |^2 \varepsilon \| \tilde{V}^{-1} \| (\| T \| + \varepsilon_1) \| x^* \|,$$

de unde deducem

$$\|z' - \varphi_0^{-1} z_1\| \leqslant |\lambda|^2 \varepsilon \|\varphi_0^{-1}\| \|\widetilde{V}^{-1}\| (\|T\| + \varepsilon_1) \|x^*\|.$$

Combinînd aceste rezultate obținem inegalitatea teoremei:

$$\|x^* - x_1\| = \|z - \varphi_0^{-1}\widetilde{z}\| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \{\varepsilon_1 + \|\varphi_0^{-1}\| \|\widetilde{V}^{-1}\| [\|\varphi V\| \varepsilon_1 + \varepsilon |\lambda| (\|T\| + \varepsilon_1)]\} \|x^*\|.$$

5. Aproximația dată de teorema precedentă permite să se întărească rezultatele date de teorema 3, paragraful 1 și teorema 2.

T e o r e m a 4. *Dacă există operatorul* $\widetilde{V}^{-1}$ *și este verificată inegalitatea*

$$p' = \{\varepsilon_1 + \|\varphi_0^{-1}\| \|\widetilde{V}^{-1}\| [\varepsilon_1 + \|\varphi V\| + \varepsilon |\lambda| (\|T\| + \varepsilon_1)]\} |\lambda| < 1,$$

atunci:

1) *Soluția ecuației*

$$V(x) = y$$

este unică pentru orice y;

2) *Dacă este îndeplinită condiția* α) *(din* § 1*), există operatorul* V^{-1} *și*

$$\|V^{-1}\| \leqslant \frac{1 + |\lambda| \|\varphi_0^{-1} V^{-1} \varphi T\|}{1 - p'};$$

3) *Este valabilă inegalitatea*

$$\|V^{-1} - (I + \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T)\| \leqslant \frac{p'}{1 - p'} \left(1 + |\lambda| \|\varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T\|\right).$$

D e m o n s t r a ț i e. 1) Dacă x este o soluție a ecuației omogene

$$V(x) = 0,$$

atunci în teorema 3, $x_1 = 0$ și avem

$$\|x\| \leqslant p' \|x\|,$$

de unde rezultă $x = 0$.

2) Dacă în inegalitatea teoremei 3 punem

$$y = V(x)$$

și deci

$$x_1 = I(y) + \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T(y),$$

atunci obținem

$$\|x - i(y) - \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T(y)\| =$$

$$= \|I(x) - (I + \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T)\, V(x)\| \leqslant p' \|x\|,$$

pentru orice $x \in E$, deci

$$\|I - (I + \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T)\, V\| \leqslant p'.$$

De aici rezultă că operatorul

$$G = (I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T)\,V$$

are invers, G^{-1}, și

$$\|G^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-p'}.$$

Însă din

$$G^{-1}G = G^{-1}(I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T)\,V = I$$

rezultă și existența operatorului invers la stînga,

$$V^{-1} = G^{-1}(I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T),$$

datorită condiției α), acesta este invers și la dreapta, deci în definitiv, operatorul V admite invers. Mai mult,

$$\|V^{-1}\| \leqslant \|G^{-1}\|\,\|I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T\| \leqslant \frac{1 + |\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T\|}{1-p'}.$$

3) Dacă în aceeași inegalitate, a teoremei 3, înlocuim x^* prin $V^{-1}(y)$, obținem, pentru orice y,

$$\|V^{-1}(y) - (I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T)(y)\| \leqslant p'\,\|V^{-1}\|\,\|y\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p'}{1-p'}(1 + |\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T\|)\,\|y\|,$$

deci

$$\|V^{-1} - (I + \lambda\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T)\| \leqslant \frac{p'}{1-p'}(1 + |\lambda|\,\|\varphi_0^{-1}\,\widetilde{V}^{-1}\,\varphi T\|).$$

Teorema este astfel complet demonstrată.

§ 3. Convergența soluțiilor apropiate către soluția exactă

1. Pentru ca prin metoda ecuațiilor apropiate să se rezolve într-adevăr ecuația exactă, trebuie să avem un șir de soluții apropiate care să conveargă către soluția exactă. Acest lucru se petrece în următoarele condiții.

Presupunem că există un șir de spații $\widetilde{E}$ și de operatori $\widetilde{T}$ satisfăcînd condițiile din paragraful 1. Convergența soluțiilor apropiate corespunzătoare este dată de următoarea.

Teoremă. *Presupunem că sînt îndeplinite condițiile*

1) *operatorul V are invers;*

2) *fiecare operator $\widetilde{V}^{(n)}$ satisface condiția* α) (*din* § 1);

3) *constantele* ε, ε_1, ε_2 *și transformările* φ, φ_0^{-1} *satisfac relațiile*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon^n \| \varphi^{(n)} \| \, \| \varphi_0^{-1\,(n)} \| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1^{(n)} \| \varphi^{(n)} \|^2 \| \varphi_0^{-1\,(n)} \|^2 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_2^{(n)} \| \varphi^{(n)} \|^2 \| \varphi_0^{-1\,(n)} \|^2 = 0.$$

Atunci ecuațiile apropiate corespunzătoare sînt rezolvabile (cel puțin de la un anumit rang) și soluțiile apropiate converg către cea exactă :

$$\lim_{n\to\infty} \| x^* - \varphi_0^{-1\,(n)} (\widetilde{x}_0^{(n)}) \| = 0.$$

REFERINȚE ȘI COMENTARII

Întreaga teorie a acestui capitol se datorește matematicianului sovietic L. V. Kantorovici și este expusă pe larg, împreună cu numeroase aplicații importante, în lucrarea sa [149].

Această lucrare conține și alte metode de rezolvare prin aproximări ale ecuațiilor funcționale (ecuații integrale, ecuații diferențiale, cu derivate parțiale), generalizînd și aprofundînd diferite metode aplicate în problemele de fizică matematică, elasticitate etc.

CAPITOLUL XI

SPAŢII VECTORIALE NORMATE PARTICULARE

În acest capitol vom examina spaţiile vectoriale normate uzuale, care au o însemnătate deosebită în analiza clasică.

În capitolul I am amintit că exemplul cel mai simplu de spaţii vectoriale normate este dat de spaţiile R şi C, adică de corpurile de scalari. Vom enumera aici, însă presupunîndu-le cunoscute, şi spaţiile euclidiene cu n dimensiuni R_n şi C_n.

Analog cu aceste spaţii se construiesc spaţiile de şiruri de numere din R sau C şi, mai departe, spaţiile de funcţii cu valori în R sau C.

§ 1. Spaţii de şiruri

1. Spaţiul şirurilor finite cu n componente este spaţiul euclidian cu n dimensiuni.

Definiţia 1. *Numim spaţiu euclidian cu n dimensiuni produsul cartezian*

$$K_n = \underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{\text{de } n \text{ ori}},$$

adică mulţimea şirurilor finite de forma

$$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad (x^i \in K;\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

normat prin

$$\| x \|^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^{n} | x^i |^2 \right)^{1/2}.$$

Presupunem cunoscute proprietăţile acestui spaţiu.

Amintim numai că spaţiul mai poate fi normat, aşa cum am văzut în capitolul I, paragraful 6, prin expresiile

$$\| x \|^{(0)} = \max \{ | x^1 |, | x^2 |, \ldots, | x^n | \},$$

$$\| x \|^{(p)} = \left(\sum_{i=1}^{n} | x^i |^p \right)^{1/p}, \qquad (p \geqslant 1)$$

şi că toate aceste norme sînt echivalente din punct de vedere topologic.

În capitolul II, paragraful 3, am văzut de asemenea că orice spațiu vectorial normat cu un număr finit de dimensiuni este izomorf algebric și topologic cu K_n.

2. Mulțimile de șiruri infinite se pot organiza ca spații vectoriale normate dacă mai sînt supuse anumitor condiții.

Considerăm mai întîi spațiul șirurilor mărginite.

D e f i n i ț i a 2. *Vom nota cu* (m) *spațiul șirurilor mărginite de numere din* K, *adică spațiul elementelor de forma*

$$x = \{ x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots \}, \quad x^i \in K, \ | x^i | \leqslant \mu, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

normat prin

$$\| x \| = \sup_{i \in N} | x^i |. \tag{1}$$

Spațiul (m) este evident vectorial față de operațiile

$$x + y = \{ x^1 + y^2, \ x^1 + y^2, \ldots, \ x^n + y^n, \ldots \}$$

$$ax = \{ ax^1, \ ax^2, \ldots, \ ax^n, \ldots \}.$$

De asemenea, se verifică imediat că expresia (1) este o normă. Să verificăm, de exemplu, condiția III_2.

Pentru orice $j \in N$ avem

$$| x^j + y^j | \leqslant | x^j | + | y^j | \leqslant \sup_{i \in N} | x^i | + \sup_{i \in N} | y^i |,$$

de unde rezultă

$$\| x + y \| = \sup_{i \in N} | x^i + y^i | \leqslant \sup_{i \in N} | x^i | + \sup_{i \in N} | y^i | = \| x \| + \| y \|.$$

Vom arăta acum că spațiul (m) este complet, deci este un spațiu Banach.

Fie

$$\{ x_n \}_{1 \leqslant n < \infty} = \{ \{ x_n^i \}_{1 \leqslant i \infty} \}_{1 \leqslant n < \infty}$$

un șir Cauchy de elemente din (m). Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel încît $n, \ m \geqslant n_0$ implică

$$\sup_{i \in N} | x_n^i - x_m^i | < \varepsilon.$$

De aici rezultă că pentru orice $i \in N$,

$$| x_n^i - x_m^i | < \varepsilon,$$

deci, pentru orice $i \in N$, șirul

$$\{ x_n^i \}_{1 \leqslant n < \infty}$$

este un șir Cauchy în K. Spațiul K fiind complet, șirul acesta are o limită x_0^i, care verifică următoarea condiție:

$$| x_0^i - x_n^i | < 2\varepsilon, \quad \text{dacă} \quad n > n_0(\varepsilon). \tag{2}$$

Considerăm acum șirul

$$x_0 = \{ x_0^i \}_{1 \leqslant i < \infty}. \tag{3}$$

Acest șir aparține spațiului (m), pentru că este mărginit:

$$| x_0^i | = | x_0^i - x_{n_0}^i + x_{n_0}^i | \leqslant | x_0^i - x_{n_0}^i | + | x_{n_0}^i | \leqslant 2\varepsilon + | x_{n_0}^i |.$$

De altă parte, din (2) rezultă

$$\sup_{i \in N} | x_0^i - x_n^i | \to 0, \qquad \text{cînd} \qquad n \to \infty$$

deci că

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0.$$

Observăm că spațiul (m) este o generalizare a spațiului K_n normat cu norma $\| x \|^{(0)}$.

3. Un alt spațiu Banach de șiruri este spațiul șirurilor convergente. D e f i n i ț i a 3. *Notăm cu* (c) *spațiul șirurilor convergente de numere* K, *adică spațiul elementelor de forma*

$$x = \{ x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots \}, \qquad (x^i \in K;\ i = 1, 2, \ldots)$$

cu

$$\lim_{i \to \infty} x^i = x^0 \in K,$$

normat tot cu norma (1).

Este evident că spațiul (c) este un subspațiu vectorial al spațiului (m). Vom mai arăta că este complet. Fie

$$\{ x_n \}_{1 \leqslant n < \infty} = \{ \{ x_n^i \}_{1 \leqslant i < \infty} \}_{1 \leqslant n < \infty}$$

un șir Cauchy de elemente din (c), adică, la fel ca mai sus, un șir satisfăcînd condiția

$$\sup_{i \in N} | x_n^i - x_m^i | < \varepsilon, \qquad \text{dacă} \qquad n,\ m \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Există atunci un șir $x = \{ x_0^i \} \subset (m)$, astfel încît

$$| x_n^i - x_0^i | < 2\varepsilon, \qquad \text{dacă} \qquad n > n_0(\varepsilon),$$

pentru orice $i \in N$, deci și

$$\sup_{i \in N} | x_n^i - x_0^i | \leqslant 2\varepsilon, \qquad \text{dacă} \qquad n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Aceasta înseamnă că șirul de elemente $\{ x_n - x \}$ este inclus în (c) și

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0.$$

Deoarece $x = (x - x_n) + x_n$, rezultă că $x \in (c)$ și completitudinea spațiului (c) este demonstrată.

4. Un subspațiu al spațiului (c) este spațiul șirurilor convergente către 0.

D e f i n i ț i a 4. *Notăm cu* (c_0) *mulțimea șirurilor de numere din* K, *convergente către* 0, *considerată ca subspațiu în* (c).

Lăsăm cititorului să demonstreze completitudinea spațiului (c_0).

5. Înainte de a trece la exemple de spații de șiruri, vom generaliza inegalitățile lui Hölder și Minkowski la serii.

În capitolul I, paragraful 6, am demonstrat inegalitatea

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{4}$$

unde a, b sînt numere reale $\geqslant 0$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$.

Utilizînd această inegalitate, obținem:

P r o p o z i ț i a 1. *Fie* $\{x^i\}_{1 \leqslant i < \infty}$ și $\{y^i\}$ *două șiruri de numere din* K, *astfel că*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p < \infty \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q < \infty,$$

p *și* q *fiind ca mai sus, sau* $p = q = 1$.

Atunci este valabilă inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^i y^i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q\right)^{1/q}. \tag{5}$$

D e m o n s t r a ț i e. Pentru $p = q = 1$, inegalitatea este evidentă. Pentru $p > 1$ punem în inegalitatea (4)

$$a = \frac{|x^i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p}}, \qquad b = \frac{y^i}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q\right)^{1/q}}.$$

Obținem

$$\frac{|x^i| \cdot |y^i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|x^i|^p}{p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p} + \frac{|y^i|^q}{q \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q}$$

și, sumînd în raport cu i,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|\,|y^i| \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^q\right)^{1/q}$$

adică tocmai inegalitatea (5).

P r o p o z i ț i a 2. *Fie* $\{x^i\}$ *și* $\{y^i\}$ *două șiruri de numere din* K, *astfel că*

$$\sum_{i=1} |x^i|^p < \infty \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^p < \infty, \quad (p \geqslant 1). \tag{6}$$

Atunci este valabilă inegalitatea

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i + y^i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y^i|^p\right)^{1/p}. \tag{7}$$

Demonstrație. Pentru $p = 1$, inegalitatea este evidentă. Pentru $p > 1$, observăm mai întîi că din (6) rezultă și

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^p < \infty, \tag{8}$$

datorită inegalității

$$| a + b |^p \leqslant 2^p (| a |^p + | b |^p), \qquad (a, b \in K). \tag{9}$$

Pentru demonstrarea inegalității (9), considerăm două cazuri:

1) $| a | > | b |$; atunci

$$| a + b | \leqslant 2 | a |$$

și

$$| a + b |^p \leqslant 2^p | a |^p \leqslant 2^p (| a |^p + | b |^p);$$

2) $| b | \geqslant a$; atunci

$$| a + b |^p \leqslant 2^p | b |^p \leqslant 2^p (| a |^p + | b |^p).$$

Astfel, inegalitatea (9) este demonstrată.

Punînd acum

$$a = x^i \quad \text{și} \quad b = y^i,$$

avem

$$| x^i + y^i |^p \leqslant 2^p (| x^i |^p + | y^i |^p),$$

de unde deducem

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^p \leqslant 2^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i |^p + \sum_{i=1}^{\infty} | y^i |^p \right),$$

deci inegalitatea (8).

Mai departe, din inegalitatea (8) deducem

$$\sum_{i=1}^{\infty} (| x^i + y^i |^{p-1})^q < \infty, \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

deoarece

$$(| x^i + y^i |^{p-1})^q = (| x^i + y^i |^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} = | x^i + y^i |^p.$$

Cu aceste observații, putem aplica de două ori inegalitatea lui Hölder șirurilor

$$\{ | x^i + y^i |^{p-1} \}_{1 \leqslant i < \infty} \quad \text{și} \quad \{ x^i \}, \quad \text{respectiv} \quad \{ y^i \}$$

și obținem, succesiv,

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^{p-1} | x^i | + \sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i | | y^i | \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} | y^i |^p \right)^{1/p} \right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^p \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i |^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} | y^i |^p \right)^{1/p} \right].$$

Împărțind prin

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i + y^i |^p\right)^{1/q}$$

obținem inegalitatea (8).

6. Analoagele normelor $\| x \|^{(p)}$ $(p \geqslant 1)$ pentru șirurile infinite ne dau spațiile șirurilor p — sumabile $(p \geqslant 1)$.

D e f i n i ț i a 5. *Vom nota cu* (l^p) *spațiul șirurilor p-sumabile de numere din* K, *adică spațiul șirurilor de forma*

$$x = \{ x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots \}$$

cu

$$\sum_{i=1}^{\infty} | x^i |^p < \infty,$$

normat prin

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1} | x^i |^p\right)^{1/p}.$$

Liniaritatea acestui spațiu se verifică imediat, ținînd seama de prima observație făcută în cursul demonstrației propoziției 2 (operațiile de adunare și înmulțire cu scalari fiind definite în mod obișnuit, la fel ca pentru spațiul (m)).

Verificăm acum condițiile normei:

III_1 este evidentă: elementul 0 al spațiului este

$$0 = \{ 0, 0, \ldots, 0, \ldots \}$$

și are norma 0; invers, expresia

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x^i |^p\right)^{1/p}$$

nu poate fi nulă decît dacă $x^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$;

III_2 este dată de propoziția 2, iar III_3 este de asemenea evidentă:

$$\| ax \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | ax^i |^p\right)^{1/p} = | a | \left(\sum_{i=1} | x^i |^p\right)^{1/p} = | a | \cdot \| x \|.$$

Vom arăta acum că spațiile (l^p) sînt complete.

Fie $\{ x_n \}$ un șir Cauchy de elemente ale spațiului (l^p). Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel că $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$ implică

$$\| x_n - x_m \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_n^i - x_m^i |^p\right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{10}$$

De aici rezultă că pentru orice i

$$| x_n^i - x_m^i | < \varepsilon, \quad \text{dacă} \quad n, m \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{11}$$

Dacă fixăm indicele i, din inegalitatea (11) deducem că șirul $\{ x_n^i \}_{1 \leqslant n < \infty} \subset K$ are o limită $x_0^i \in K$. Considerăm șirul $x_0 = \{ x_0^i \}_{1 \leqslant i < \infty}$.

Inegalitatea (10) ne arată că pentru orice k

$$\sum_{i=1}^{k} | x_n^i - x_m^i |^p < \varepsilon^p, \quad \text{dacă } n, m \geqslant n_0.$$

Dacă în această ultimă inegalitate fixăm pe $n \geqslant n_0$ și trecem la limită pentru $m \to \infty$, obținem

$$\sum_{i=1}^{k} | x_n^i - x_0^i |^p < \varepsilon^p, \quad \text{dacă } n \geqslant n_0.$$

Trecînd acum la limită pentru $k \to \infty$, avem

$$\sum_{i=1} | x_n^i - x_0^i |^p < \varepsilon^p, \quad \text{dacă } n \geqslant n_0. \tag{12}$$

Aceasta înseamnă că elementele $x_0 - x_n$, pentru $n \geqslant n_0$ aparțin spațiului (l^p). Însă

$$x_0 = (x_0 - x_n) + x_n,$$

de unde $x_0 \in (l^p)$.

Cum din inegalitatea (12) rezultă

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x_0 \| = 0,$$

completitudinea spațiului (l^p) este demonstrată.

§ 2. Spațiul funcțiilor mărginite și măsurabile

1. Considerăm funcțiile măsurabile și mărginite definite pe segmentul $[0,1]$ și cu valori complexe.

Mulțimea acestor funcții o împărțim în clase de echivalență după următoarea relație de echivalență:

$x(t) \sim y(t)$, *dacă* $x(t) \neq y(t)$ *numai pe o mulțime de măsură nulă.*

Se verifică imediat că această relație satisface condițiile date în capitolul introductiv pentru relațiile de echivalență și este compatibilă cu structura de spațiu vectorial, adică:

dacă

$$x_1(t) \sim y_1(t) \quad \text{și} \quad x_2(t) \sim y_2(t),$$

atunci

$$x_1(t) + y_1(t) \sim y_1(t) + y_2(t);$$

dacă

$$x(t) \sim y(t),$$

atunci $\quad ax(t) \sim ay(t)$.

Numim, ca de obicei, reprezentant al unei clase de echivalență, orice funcție care aparține acestei clase. Relațiile de mai sus ne permit să definim operațiile de adunare și înmulțire între clasele de echivalență cu ajutorul operațiilor între reprezentanți. Astfel, dacă x și y sînt două clase de echivalență și $x(t)$, $y(t)$ doi reprezentanți respectivi, suma $x + y$ este clasa

care are ca reprezentant funcția $x(t) + y(t)$. Relațiile de mai sus ne arată că această definiție este independentă de reprezentanții aleși.

D e f i n i ț i e. *Numim spațiu* (M) *mulțimea claselor de echivalență definite mai sus, cu structura vectorială dată și cu norma*

$$\| x \| = \text{ad. max}_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) |,$$

unde $x(t)$ *este un reprezentant al clasei* x.

Această expresie se definește astfel: Fie A o mulțime oarecare de măsură nulă conținută în segmentul [0,1] și $\complement A$ complementara ei în acest segment. Fie

$$\mu_x(A) = \sup_{t \in \complement A} | x(t) |.$$

Marginea inferioară a expresiilor $\mu_x(A)$, cînd A parcurge mulțimea tuturor părților de măsură nulă din [0,1], se numește adevăratul maxim al funcției $| x(t) |$ pe acest segment.

Să arătăm că funcționala $\| x \|$ astfel definită satisface condițiile normei:

În primul rînd se vede imediat că dacă două funcții sînt echivalente, au același adevărat maxim.

Deci dacă $x(t) \neq 0$ numai pe o mulțime de măsură nulă, ad. max $| x(t) | = 0$.

Invers, dacă $x = 0$, atunci $x(t) \neq 0$ numai pe o mulțime de măsură nulă. Să presupunem că ar exista o parte $F \subset [0,1]$ astfel ca

$$m(F) > 0 \quad \text{și} \quad | x(t) | > 0, \quad \text{pentru orice} \quad t \in F.$$

În acest caz există o parte $F' \subset F$ cu $m(F') > 0$ și un număr $\varepsilon > 0$, astfel ca $| x(t) | > \varepsilon$ pentru orice $t \in F'$. Într-adevăr, fie (ε_n) un șir de numere pozitive descrescătoare, astfel ca $\lim \varepsilon_n = 0$ și mulțimile

$$F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_n \}.$$

Avem

$$F = F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > 0 \} = F \cap \bigcup_n \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_n \} =$$

$$= \bigcup_n F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_n \},$$

de unde deducem

$$m(F) = m\big(F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > 0 \}\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\big(F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_n \}\big).$$

Dacă $m\big(F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_n \}\big) = 0$, pentru orice n, atunci $m\big(F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > 0 \}\big) = 0$, contrar ipotezei. Deci există o mulțime

$$F' = F \cap \{ t \,|\, | x(t) | > \varepsilon_{n_0} \}$$

cu $m(F') > 0$, pe care $| x(t) | > \varepsilon_{n_0} > 0$.

Rezultă că

$$\mu_x(A) = \sup_{t \in \complement A} |x(t)| > \varepsilon_{n_0},$$

oricare ar fi $A \subset [0,1]$ cu $m(A) = 0$, deoarece

$$F' \cap \complement A \neq \emptyset,$$

deci

$$\|x\| = \inf \mu_x(A) \geqslant \varepsilon_{n_0} > 0,$$

contrar ipotezei.

Astfel, condiția III_1 este verificată.

Din relația

$$\sup_{t \in \complement A} |x(t) + y(t)| \leqslant \sup_{t \in \complement A} |x(t)| + \sup_{t \in \complement A} |y(t)|$$

rezultă

$$\mu_{x+y}(A) \leqslant \mu_x(A) + \mu_y(A).$$

Deoarece

$$\|x\| = \inf_{\substack{m(A)=0 \\ A \subset [0,1]}} \mu_x(A),$$

oricărui număr pozitiv ε îi corespunde o parte $A_\varepsilon \subset [0,1]$, astfel ca $m(A_\varepsilon) = 0$ și

$$\mu_x(A_\varepsilon) \leqslant \|x\| + \varepsilon$$
$$\mu_y(A_\varepsilon) \leqslant \|y\| + \varepsilon.$$

De aici rezultă

$$\|x + y\| \leqslant \mu_{x+y}(A_\varepsilon) \leqslant \mu_x(A_\varepsilon) + \mu_y(A_\varepsilon) \leqslant \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon.$$

Numărul ε fiind arbitrar,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

deci condiția III_2 este verificată.

Condiția III_3 se verifică imediat:

$$\mu_{ax}(A) = \sup_{t \in \complement A} |ax(t)| = |a| \sup |x(t)| = |a| \mu_x(A),$$

$$\|ax\| = \inf \mu_{ax}(A) = |a| \inf \mu_x(A) = |a| \|x\|.$$

Rămîne să arătăm că (M) este un spațiu complet.

Fie $\{x_n\}$ un șir Cauchy de elemente din (M), adică un șir de clase de funcții ale căror reprezentanți verifică inegalitatea

$$\text{ad. } \max_{t \in [0,1]} |x_p(t) - x_q(t)| < \varepsilon,$$

dacă $p, q \geqslant n_0(\varepsilon)$.

Șirul $\{x_p(t)\}$ este uniform convergent pe complementara unei mulțimi de măsură nulă.

Într-adevăr, pentru orice pereche de numere naturale $p, q \geqslant p_0(\varepsilon)$, avem

$$| x_p(t) - x_q(t) | < \varepsilon$$

pe complementara unei mulțimi $A_{p,q}$ cu $m(A_{p,q}) = 0$. Mulțimea

$$A = \bigcup_{p,q} A_{pq}$$

este de măsură nulă, deoarece

$$m(A) \leqslant \sum_{p,q} m(A_{p,q}) = 0.$$

Șirul $\{x_p(t)\}$ este uniform convergent pe complementara mulțimii A, către o funcție măsurabilă $x(t)$ și

$$| x_p(t) - x(t) | < 2\varepsilon$$

pentru orice $t \in \complement A$, cu condiția ca $p \geqslant p_0(\varepsilon)$.

Funcția $x(t)$ este mărginită, pentru că

$$| x(t) | \leqslant | x(t) - x_{p_0}(t) | + | x_{p_0}(t) | \leqslant 2\varepsilon + | x_{p_0}(t) |.$$

Fie acum un alt șir de reprezentanți $\{x_n'(t)\}$ ai șirului dat $\{x_n\}$. Avem

$$x_p'(t) = x_p(t),$$

pentru orice $t \in \complement A'$, cu $m(A') = 0$.

Atunci, pentru orice $t \in \complement(A \cup A')$,

$$| x_p'(t) - x(t) | < 2\varepsilon, \quad \text{dacă} \quad p \geqslant p_0(\varepsilon),$$

de unde rezultă că

$$\| x_n - x \| < 2\varepsilon, \quad \text{dacă} \quad p \geqslant p_0(\varepsilon).$$

§ 3. Spațiul funcțiilor continue

1. Considerăm funcțiile continue, definite pe segmentul [0,1] și cu valori în K. Se știe că o astfel de funcție este mărginită, și că există pentru ea

$$\sup_{t \in [0,1]} | x(t) | = \max_{t \in [0,1]} | x(t).$$

Definiție. *Numim spațiu (C), spațiul funcțiilor continue definite pe segmentul* [0,1] *și cu valori în K, operațiile de adunare și înmulțire cu scalari fiind date de:*

$z = x + y$, *dacă și numai dacă* $z(t) = x(t) + y(t)$ *pentru orice* $t \in [0,1]$

$z = ax$, *dacă și numai dacă* $z(t) = ax(t)$ *pentru orice* $t \in [0,1]$,

iar norma de expresia

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

Liniaritatea acestui spațiu este cunoscută. Verificăm condițiile normei.

III_1. Elementul 0 al spațiului (C) este funcția nulă pe tot segmentul $[0,1]$, deci are norma nulă și invers orice funcție al cărei modul maxim este nul, este nulă peste tot.

III_2 $$\|x + y\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t) + y(t)| \leqslant \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |y(t) = \|x\| + \|y\|.$$

III_3 $$\|ax\| = \max_{t \in [0,1]} |ax(t)| = |a| \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = |a| \|x\|.$$

2. Convergența în spațiul (C) coincide cu convergența uniformă. Într-adevăr, fie $\{x_n\} \subset (C)$ un șir convergent către elementul $x \in (C)$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)| = 0,$$

deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel ca

$$\max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon)$$

și prin urmare

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

oricare ar fi $t \in [0,1]$. Aceasta înseamnă că șirul $\{x_n(t)\}$ este uniform convergent către $x(t)$ pe segmentul $[0,1]$.

Invers, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel ca

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

oricare ar fi $t \in [0,1]$, atunci avem și

$$\max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

de unde deducem

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

3. Completitudinea spațiului (C) este binecunoscută din analiza clasică, deoarece limita uniformă a unui șir de funcții continue definite pe un segment este tot o funcție continuă.

4. Spațiul (C) poate fi generalizat, dacă în loc de funcții definite pe un segment se consideră funcțiile continue cu valori complexe, sau reale, definite pe un spațiu metric compact, Q.

Dacă nu se poate ivi o confuzie, vom nota tot cu (C) spațiul acestor funcții, sau, dacă este necesar, $C(Q)$.

Norma în $C(Q)$ este

$$\|x\| = \max_{t \in Q} |x(t)|.$$

5. Examinăm acum un subspațiu al spațiului (C), normat însă cu o normă diferită de aceea din (C).

Dacă Q este un spațiu metric și compact, *vom însemna cu* (CL) *mulțimea funcțiilor* $x(t)$ *cu valori complexe, definite pe* Q *și având proprietățile*

$$m(x) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in Q \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{D(t_1, t_2)} < +\infty,$$

unde $D(t_1, t_2)$ *este distanța între* t_1 *și* t_2.

Vom demonstra mai întîi incluziunea

$$(CL) \subset (C).$$

Într-adevăr, pentru $t_0 \in Q$ fix, avem

$$\sup_{\substack{t \in Q \\ t \neq t_0}} \frac{|x(t) - x(t_0)|}{D(t_1, t_0)} = \rho < +\infty,$$

de unde deducem

$$|x(t) - x(t_0)| \leqslant \rho D(t t_0).$$

De aici rezultă continuitatea funcției $x(t)$ în orice punct $t \in Q$ și relația

$$\sup_{t \in Q} |x(t)| < +\infty.$$

Mulțimea (CL) *este un spațiu Banach dacă luăm ca normă expresia*

$$\| x(t) \|_{CL} = \| x(t) \|_C + m(x) =$$

$$= \sup_{t \in Q} |x(t)| + \sup_{\substack{t_1, t_2 \in Q \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{D(t_1, t_2)}.$$

Într-adevăr, această expresie satisface condițiile normei și spațiul astfel normat este complet:

1) $\| x(t) \|_{CL}$ satisface condițiile normei: III_1 $\| x(t) \|_{CL} = 0$ dacă și numai dacă $x(t) = 0$ pentru orice $t \in Q$.

Prima implicație este evidentă, a doua rezultă din faptul că

$$\| x(t) \|_{CL} = \| x \|_C + m(x)$$

și $\| x \|_C$ este o normă.

III_2 $\| x_1(t) + x_2(t) \|_{CL} \leqslant \| x_1(t) \|_{CL} + \| x_2(t) \|_{CL}$.

Este suficient să demonstrăm convexitatea pentru $m(x)$.

Aceasta rezultă în felul următor:

$$m(x_1 + x_2) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in Q \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x_1(t_1) + x_2(t_1) - x_1(t_2) - x_2(t_2)|}{D(t_1, t_2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{t_1, t_2 \in Q \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x_1(t_1) - x_1(t_2)|}{D(t_1, t_2)} + \sup_{\substack{t_1, t_2 \in Q \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x_2(t_1) - x_2(t_2)|}{D(t_1, t_2)} = m(x_1) + m(x_2)$$

III_3 $\| ax(t) \|_{CL} = |a| \, \| (xt) \|_{CL}$.

Este suficient să demonstrăm

$$m(ax) = |a| \, m(x).$$

Avem într-adevăr

$$\sup_{\substack{t_1,t_2\in Q\\ t_1\neq t_2}} \frac{|\,ax(t_1)-ax(t_2)\,|}{D(t_1,t_2)} = |\,a\,| \sup_{\substack{t_1,t_2\in Q\\ t_1\neq t_2}} \frac{|\,x(t_1)-x(t_2)\,|}{D(t_1,t_2)}.$$

2) Spațiul (CL) este complet.

Este suficient să arătăm că

$$\lim_{n,p\to\infty} \|\,x_n - x_p\,\|_{CL} = 0$$

implică existența unei funcții $x(t)\in(CL)$, astfel că

$$\lim_{n\to\infty} \|\,m(x_n - x)\,\| = 0.$$

Vom demonstra în prealabil următoarea

L e m ă. *Fie $x_n(t)$ un șir de elemente din (CL), convergent (în sens obișnuit) către o funcție $x(t)$. Avem*

$$m(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} m(x_n).$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie

$$\widetilde{m} = \lim_{n\to\infty} m\,(x_n).$$

Există un subșir x_n, astfel ca

$$\widetilde{m} = \lim_{i\to\infty} m\,(x_{n_i}).$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Există un întreg $I\,(\varepsilon)$, astfel ca

$$\widetilde{m}\,(x_{n_i}) \leqslant m + \varepsilon, \quad i > I\,(\varepsilon).$$

Dacă $t_1,\ t_2\in Q,\ t_1\neq t_2$, atunci

$$\frac{|\,x(t_1)-x(t_2)\,|}{D(t_1,t_2)} = \lim_{i\to\infty} \frac{|\,x_n(t_1)-x_{n_i}(t_2)\,|}{D(t_1,t_2)}.$$

Rezultă

$$\frac{|\,x(t_1)-x(t_2)\,|}{D(t_1,t_2)} \leqslant \widetilde{m} + \varepsilon,$$

ε fiind arbitrar, lema este demonstrată.

Ne întoarcem acum la problema noastră (completitudinea spațiului (CL)).

Să presupunem că

$$\lim_{n,p\to\infty} \|\,x_n - x_p\,\|_{CL} = 0,$$

Aceasta implică

$$\lim_{n,p} \|\,x_n - x_p\,\|_C = 0$$

și

$$\lim_{n,p} m\,(x_n - x_p) = 0.$$

Există deci o funcție $x(t)\in(C)$ astfel ca

$$\lim_{n} \|\,x_n - x\,\|_C = 0.$$

Rămîne să demonstrăm că $x \in (CL)$ și

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \|_{CL} = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există $N'(\varepsilon)$, astfel ca

$$m(x_N - x_n) < \varepsilon \text{ pentru } N \geqslant N'(\varepsilon),\ n \geqslant N'(\varepsilon).$$

Dacă fixăm N, avem

$$x_N - x_n \to x_N - x, \text{ pentru } n \to \infty$$

și după lema precedentă

$$m(x_N - x) \leqslant \liminf_{n \to \infty} m(x_N - x_n).$$

Rezultă atunci

$$x_N - x \in (CL),$$

de unde se vede că

$$x \in (CL).$$

Mai mult, N fiind arbitrar $\geqslant N'(\varepsilon)$, avem

$$\lim_{n \to \infty} m(x_n - x) = 0.$$

Completitudinea spațiului (CL) este astfel demonstrată.

O b s e r v a ț i e. Din cursul demonstrației se vede că spațiile (C) și (CL) verifică și condiția $j)$ (cap. VIII, § 6).

6. Vom examina acum relația dintre spațiile (C) și (M).

Dacă $x(t)$ este o funcție continuă definită pe segmentul $[0,1]$, atunci

$$\text{ad.} \max_{t \in [0,1]} | x(t) | = \max_{t \in [0,1]} | x(t) |,$$

pentru că dacă $m(A) = 0$

$$\sup_{t \in [0,1] - A} | x(t) | = \sup_{t \in [0,1]} | x(t) |.$$

De altă parte, o clasă $x \in (M)$ nu poate conține două funcții continue diferite cel puțin într-un punct, pentru că adevăratul maxim, sau, ceea ce este același lucru, maximul diferenței a două astfel de funcții nu este nul.

Deci fiecare funcție continuă determină în mod biunivoc o clasă $x \in (M)$. Mulțimea acestor clase, pe care o vom nota cu $(\mathcal{C})$, este un subspațiu Banach al spațiului (M). În general spațiul $(\mathcal{C})$ este confundat cu spațiul (C).

§ 4. Spațiile funcțiilor p-sumabile ($P \geqslant 1$)

1. Considerăm funcțiile $x(t)$ definite pe segmentul $[0,1]$ și cu valori în K, astfel încît

$$\int_0^1 | x(t) |^p \, dt < \infty. \tag{1}$$

Împărțim mulțimea acestor funcții, care formează un spațiu vectorial, în clase de echivalență, după aceeași relație de echivalență ca în cazul spațiului (M) și introducem operațiile algebrice între clase la fel ca acolo.

Definiție. *Spațiul astfel obținut, normat prin*

$$\| x \| = \left(\int_0^1 | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \tag{2}$$

îl notăm (L^p).

2. Pentru liniaritatea spațiilor (L^p) este suficient să demonstrăm că suma a două funcții care satisfac condiția (1), satisface condiția (1).

În acest scop plecăm, la fel ca în cazul spațiilor (l^p), de la inegalitatea

$$| a + b |^p \leqslant 2^p (| a |^p + | b |^p) \tag{3}$$

(inegalitatea (9), § 1),
în care punem

$$a = x(t), \; b = y(t).$$

Obținem

$$| x(t) + y(t) |^p \leqslant 2^p (| x(t) |^p + | y(t) |^p)$$

de unde deducem

$$\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p \, dt \leqslant 2^p \left(\int_0^1 | x(t) |^p \, dt + \int_0^1 | y(t) |^p \, dt \right) < \infty .$$

3. Dintre condițiile normei, mai dificilă este aceea a triunghiului, III_2, pe care o demonstrăm generalizînd inegalitățile lui Hölder și Minkowski pentru integrale.

Pornim de la inegalitatea (4), paragraful 1,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \; a, b \geqslant 0, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \; p > 1. \tag{4}$$

Propoziția 1. *Fie $x(t)$ și $y(t)$ două funcții definite pe segmentul* [0,1] *și astfel ca*

$$\int_0^1 | x(t) |^p \, dt < \infty, \int_0^1 | y(t) |^q \, dt < \infty.$$

Atunci este valabilă inegalitatea

$$\int_0^1 | x(t) \, y(t) | \, dt \leqslant \left(\int_0^1 | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 | y(t) |^q \, dt \right)^{1/q} . \tag{5}$$

Demonstrație. Punem, în inegalitatea (4),

$$a = \frac{| x(t) |}{\left(\int_0^1 | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}}, \; b = \frac{| y(t) |}{\left(\int_0^1 | y(t) |^q \, dt \right)^{1/q}}$$

și obținem

$$\frac{| x(t) | \, | y(t) |}{\left(\int_0^1 | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 | y(t) |^q \, dt \right)^{1/q}} \leqslant \frac{| x(t) |^p}{p \cdot \int_0^1 | x(t) |^p \, dt} + \frac{y(t)^q}{q \cdot \int_0^1 | y(t) |^q \, dt} .$$

De aici deducem

$$\int_0^1 | x(t) y(t) | dt \leqslant \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt\right)^{1/p} \left(\int_0^1 | y(t) |^q dt\right)^{1/q}.$$

P r o p o z i ț i a 2. *Fie $x(t)$ și $y(t)$ două funcții definite pe segmentul $[0,1]$ și cu valori în K, astfel ca*

$$\int_0^1 | x(t) |^p dt < \infty \text{ și } \int_0^1 | y(t) |^p dt < \infty, \ (p \geqslant 1). \tag{6}$$

Atunci este valabilă inegalitatea

$$\left(\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 | y(t) |^q dt\right)^{1/q}. \tag{7}$$

D e m o n s t r a ț i e. Pentru $p = 1$, inegalitatea este evidentă. Pentru $p > 1$, am arătat mai sus că din (6) rezultă și

$$\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p dt < \infty$$

și de aici deducem

$$\int_0^1 | x(t) + y(t) |^{(p-1)q} dt < \infty.$$

Atunci putem aplica inegalitatea lui Hölder funcțiilor

$$| x(t) + y(t) |^{p-1} \text{ și } x(t), \text{ respectiv } y(t),$$

și obținem

$$\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 | x(t) + y(t) |^{p-1} | x(t) | dt + \int_0^1 | x(t) + y(t) |^{p-1} | y(t) | dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 | x(t) + y(t) |^{(p-1)q} dt\right)^{1/q} \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_0^1 | x(t) + y(t) |^{(p-1)q} dt\right)^{1/q} \left(\int_0^1 | y(t) |^p dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p dt\right)^{1/q} \left\{ \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 | y(t) |^p dt\right)^{1/p} \right\}.$$

Împărțind prin

$$\left(\int_0^1 | x(t) + y(t) |^p dt\right)^{1/q}$$

obținem inegalitatea (7).

Aceasta este chiar, cererea III_2 pentru expresia (2).

Cererea III_1 este evidentă dacă ținem seama că relația

$$x(t) \neq y(t)$$

numai pe o mulțime de măsură nulă

implică

$$\int_0^1 | x(t) |^p \, dt = \int_0^1 | y(t) |^p \, dt,$$

și reciproc.

Cererea III_3, se verifică la fel.

4. Atunci cînd nu se pot produce confuzii, spunem că funcția x aparține spațiului (L^p), înțelegînd prin aceasta că funcția x aparține unei clase pe care o determină și care, la rîndul ei, aparține spațiului (L^p).

Dacă un șir de funcții $\{x_n\} \subset (L^p)$ converge în sensul normei din (L^p) către o funcție $x \in (L^p)$, mai spunem că șirul $\{x_n\}$ este convergent în medie de ordin p către funcția x.

5. Completitudinea spațiilor (L^p). Fie $\{x_n\} \subset (L^p)$ un șir Cauchy. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$, astfel încît $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$ implică

$$\| x_n - x_m \| = \left(\int_0^1 | x_n(t) - x_m(t) |^p \, dt \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

adică

$$\int_0^1 | x_n(t) - x_m(t) |^p \, dt < \varepsilon^p.$$

Considerăm un șir de numere $\{\varepsilon_k\}$, unde

$$\varepsilon \frac{p}{k} = \frac{1}{2^{kp+k}}$$

și numerele corespunzătoare $n_0(\varepsilon_k)$. Dacă $n, m \geqslant n_0(\varepsilon_k)$, inegalitatea

$$| x_n(t) - x_m(t) | > \frac{1}{2^k}$$

nu poate fi satisfăcută decît pentru t aparținînd unei mulțimi $A_k \subset [0,1]$ de măsură $< \frac{1}{2^k}$.

Putem alege atunci un șir crescător de numere naturale $\{n_k\}$, astfel ca

$$n_k \geqslant n_0(\varepsilon_k)$$

și inegalitatea

$$| x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t) | > \frac{1}{2^k}$$

să nu fie satisfăcută pe mulțimea A_k de măsură $< \frac{1}{2^k}$. Pentru simplificare, vom nota

$$x_{n_k}(t) = z_k.$$

Considerăm acum mulțimea

$$B_k = \complement \bigcup_{i=k} A_i,$$

complementara fiind luată față de segmentul $[0,1]$.

Avem

$$m(B_k) \geqslant 1 - \sum_{i=k}^{k} m(A_i) \geqslant 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

și

$$| z_{n+1}(t) - z_n(t) | \leqslant \frac{1}{2^n}, \text{ pentru } n \geqslant k \text{ și } t \in B_k.$$

Ultima inegalitate ne arată că șirul $\{z_n(t)\}$ este un șir Cauchy față de convergența uniformă pe mulțimea B_k.

Fie

$$B_0 = \bigcup_{k=1} B_k.$$

Avem

$$m(B_0) = 1,$$

pentru că

$$B_k \subset B_{k+1}.$$

Șirul $\{z_n(t)\}$ este un șir Cauchy pentru orice punct $t \in B_0$, întrucît orice altfel de punct aparține uneia dintre mulțimile B_k. Atunci există o funcție $z(t)$ definită pe B_0, astfel ca

$$\lim_{n=\infty} z_n(t) = z(t), \text{ pentru orice } t \in B_0.$$

De altă parte șirul de funcții $\{z_n(t)\}$ este un șir Cauchy față de convergența în medie de ordin p, fiind un subșir al șirului $\{x_n(t)\}$, deci, pentru orice ε există $n_1(\varepsilon)$, astfel încît n, $m \geqslant n_1(\varepsilon)$ implică

$$\int_0^1 | z_n(t) - z_m(t) |^p \, dt < \varepsilon$$

și cu atît mai mult

$$\int_{B_k} | z_n(t) - z_m(t) |^p \, dt < \varepsilon,$$

pentru orice $k = 1,2,\ldots$ (deoarece funcția de subintegrală este pozitivă)

Păstrînd pe n fix și trecînd la limită pentru $m \to \infty$ (ceea ce este permis datorită convergenței uniforme a șirului $z_n(t)$ către $z(t)$ pe B_k), obținem

$$\int_{B_k} |z_n(t) - z(t)|^p \, dt \leqslant \varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_1(\varepsilon).$$

Trecînd acum din nou la limită pentru $k \to \infty$, obținem

$$\int_{B_0} | z_n(t) - z(t) |^p \, dt \leqslant \varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_1(\varepsilon)$$

sau, ceea ce este același lucru, deoarece $m(\complement B_0) = 0$,

$$\int_0^1 |z_n(t) - z(t)|^p \, dt \leqslant \varepsilon, \text{ dacă } n \geqslant n_1(\varepsilon). \tag{8}$$

Aceasta înseamnă că pentru $n \geqslant n_1(\varepsilon)$, funcțiile

$$z(t) - z_n(t) \text{ aparțin spațiului } (L^p).$$

De aici deducem că și funcția

$$z = (z - z_n) + z_n$$

aparține spațiului (L^p).

De altă parte, din inegalitatea (8) deducem că

$$\lim_{n \to \infty} \| z_n - z \| = 0.$$

Însă

$$\| x_n - z \| \leqslant \| x_n - x_{n_k} \| + \| x_{n_k} - x \| = \| x_n - x_{n_k} \| + \| z_k - x \|,$$

de unde rezultă și

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

și completitudinea spațiului (L^p) este demonstrată.

§ 5. Exemplu de spațiu vectorial normat necomplet

Fie (C^1) spațiul funcțiilor cu valori reale, continui și derivabile definite pe segmentul $[0,2]$.

Dacă îl organizăm cu aceeași structură algebrică și normă ca pe (C), (C^1) este un spațiu vectorial normat, însă nu este complet.

Într-adevăr, există șiruri de funcții continue și derivabile care converg uniform către o funcție continuă însă nederivabilă.

Fie, de exemplu, șirul

$$x_n(t) = \begin{cases} t & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{n-1}{n} \\ \dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{n}\sqrt{2 - n^2(t-1)^2} & \dfrac{n-1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{n+1}{n} \\ 2 - t & \dfrac{n+1}{n} \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Acest șir converge uniform către funcția

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 - t & \text{„} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

care nu are derivată în punctul $t = 1$.

§ 6. Exemplu de spații Banach care nu satisfac condiția J *)

Tot cu ajutorul spațiului (C^1) obținem un exemplu de două spații Banach, L și B care nu satisfac condiția j) (cap. VIII, § 6).

Într-adevăr, dacă normăm spațiul (C^1) prin

$$\| x(t) \|_{C^1} = \| x(t) \|_C + \| x'(t) \|_C \tag{1}$$

atunci el devine un spațiu Banach. Șirul $\{x_n(t)\}$ construit în paragraful precedent ne arată că, dacă luăm pe (C^1) cu norma (1) drept spațiu L și pe (C) drept spațiu B, condiția j) nu este satisfăcută.

§ 7. Ordonarea spațiilor particulare

1. Spațiile particulare considerate în acest capitol, atunci cînd sînt formate din șiruri de numere reale, sau din funcții cu valori reale, se pot ordona în mod natural, ținînd seama de ordonarea numerelor reale.

2. Spațiile de șiruri de numere reale se ordonează astfel: dacă

$$x = \{ x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots \},$$

$$y = \{ y^1, y^2, \ldots, y^n, \ldots \}$$

sînt două elemente ale unui astfel de spațiu, relația $x \leqslant y$ se definește prin

$$x^i \leqslant y^i, \qquad \text{pentru orice } i = 1,2,\ldots$$

Mulțimea elementelor pozitive, E_+, va fi atunci mulțimea șirurilor compuse din numere pozitive sau nule.

Cu această ordonare, spațiile (l^p) cu $p \geqslant 1$, sînt latice Banach. Elementul $z = \sup(x, y)$ este șirul

$$z = \{ z^1, z^2, \ldots, z^n, \ldots \},$$

unde

$$z^n = \max(x^n, y^n), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Mulțimea elementelor pozitive, $(l^p)_+$ nu are elemente interioare.

3. Spațiile (L^p) cu $p \geqslant 1$, se ordonează prin relația următoare: dacă x și y sînt două elemente din $(L^p)_+$ atunci $x \leqslant y$ înseamnă

$$x(t) \leqslant y(t) \text{ } \textit{aproape peste tot}, \text{ } x(t) \text{ } \textit{și} \text{ } y(t)$$

fiind doi reprezentanți oarecare ai claselor de funcții x și y.

Spațiile (L^p) sînt de asemenea latice Banach, însă nici în acest caz mulțimea elementelor pozitive nu are puncte interioare.

4. Spațiul (C) al funcțiilor continue se ordonează prin relația

$$x(t) \leqslant y(t), \quad \text{pentru orice } t.$$

Elementul $z = \sup(x, y)$ este funcția

$$z(t) = \max(x(t), y(t)).$$

Mulțimea elementelor pozitive, are în acest caz, interiorul nevid.

*) Cap. VIII, § 6.

§ 8. Spații Banach de distribuții

1. Anumite metode de calcul întrebuințate pînă nu de mult în fizica matematică fără justificare, au pus problema extinderii noțiunii de derivată la funcții nederivabile în sensul obișnuit și la elemente de o natură mai generală decît funcțiile.

Această problemă a fost rezolvată de L. Schwartz [240] cu ajutorul spațiilor vectoriale topologice local-convexe. Procedeul lui L. Schwartz constă în extinderea operației de derivare, prin transpunere, de la un spațiu de funcții indefinit derivabile la dualul lui, adică la spațiul funcționalelor liniare și continue, topologizat în mod convenabil. Elementele dualului au fost numite distribuții sau funcții generalizate.

Noi am arătat că procedeul lui L. Schwartz se poate aplica și în cadrul unor spații vectoriale normate.

În acest paragraf dăm exemple de spații Banach conjugate cu spații vectoriale normate necomplete, în care derivata este un operator continuu. Numim aceste spații, spații Banach de distribuții, prin analogie cu denumirea dată de L. Schwartz.

2. Considerăm întîi un spațiu de funcții definite și indefinit derivabile pe toată axa reală, cu excepția originii și care se anulează cînd $|t| \to \infty$.

Definiția 1. *Numim spațiu* Λ *spațiul funcțiilor cu valori reale, care pe fiecare semiaxă sînt combinații liniare de funcții de forma* $e^{-\varepsilon|t|}$, *cu* $0 < \varepsilon \leqslant 1$. *În* Λ *definim o normă prin expresia*

$$\|x\| = \sup_{\substack{t \in R \\ 0 \leqslant n < \infty}} |x^{(n)}(t)|. \tag{1}$$

Se verifică ușor că expresia (1) este o normă. Spațiul este un spațiu vectorial normat, însă nu este complet.

Pentru o funcție $x \in \Lambda$, derivata x' este definită pe aceeași mulțime ca și x, anume $0 < |t| < \infty$ și $x' \in \Lambda$.

Într-adevăr, fie

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\varepsilon_i |t|} & -\infty < t \leqslant 0 \\ \sum_{j=1}^{m} b_j e^{-\varepsilon_j |t|} & 0 < t < \infty \end{cases}$$

deci

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\varepsilon_i t} & -\infty < t < 0 \\ \sum_{j=1}^{m} b_j e^{-\varepsilon_j t} & 0 < t < \infty \end{cases}$$

Atunci

$$x'(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i e^{\varepsilon_i t} & -\infty < t < 0 \\ \sum_{j=1}^{n} (-b_j \varepsilon_j) e^{-\varepsilon_j t} & 0 < t < \infty, \end{cases}$$

de unde se vede că $x' \in \Lambda$.

P r o p o z i ț i a 1. *Operația de derivare este un operator continuu de normă* 1 *în* Λ.

D e m o n s t r a ț i e. Din definiție rezultă

$$\| x' \| \leqslant \| x \|$$

de unde deducem că operația de derivare este continuă și are norma $\leqslant 1$.

De altă parte există funcții în Λ pentru care $\| x' \| = \| x \|$; o astfel de funcție este

$$x(t) = e^{-|t|}$$

De aici rezultă că norma operației de derivare este chiar 1.

3. Trecem acum la spațiul conjugat.

D e f i n i ț i a 2. *Numim spațiu Banach de distribuții pe axa reală, spațiul* Λ^* *al funcționalelor liniare și continue definite pe* Λ.

Elementele din Λ^* generalizează noțiunea de funcție, pentru că orice funcție φ mărginită pe toată axa reală definește un element din Λ^* prin relația

$$\langle x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(t)\, dt, \quad x \in \Lambda \tag{2}$$

și, de altă parte, există elemente în Λ^* care nu sînt de forma (2), de exemplu funcționalele δ_a $(a \neq 0)$ definite prin

$$\langle x, \delta_a \rangle = x(a), \qquad x \in \Lambda \tag{3}$$

În Λ^* se poate defini operația de derivare prin transpunere.

D e f i n i ț i a 3. *Fie* $f \in \Lambda^*$ *o distribuție. Distribuția* f' *dată de relația*

$$\langle x, f' \rangle = -\langle x', f \rangle, \qquad x \in \Lambda \tag{4}$$

se numește derivata distribuției f.

T e o r e m ă. *Operația de derivare dată de relația* (4) *este un operator liniar și continuu în* Λ^*. *Pentru funcțiile care au derivate continue și definesc împreună cu derivatele lor distribuții din* Λ^*, *derivata coincide cu derivata obișnuită.*

D e m o n s t r a ț i e. Liniaritatea operației de derivare este evidentă. Continuitatea rezultă din relația

$$|\langle x, f' \rangle| = |\langle x', f \rangle| \leqslant \| f \| \cdot \| x' \| \leqslant \| f \| \, \| x \| \tag{5}$$

care ne arată în același timp că norma acestei operații este $\leqslant 1$. Într-adevăr, din (5) rezultă

$$\| f' \| = \sup_{\| x \| = 1} |\langle x, f' \rangle| \leqslant \| f \|.$$

Fie acum φ o funcție cu derivată continuă φ'; presupunem că φ și φ' definesc distribuții din Λ^*. Atunci

$$\langle x, \varphi' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \varphi'(t)\, dt = x(t)\, \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, \varphi(t)\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, \varphi(t)\, dt = -\langle x', \varphi \rangle ,$$

deci derivata obișnuită verifică relația (4).

4. Dacă în loc de axa reală luăm un segment finit, de exemplu [0,1], se poate construi un spațiu de funcționale liniare cotinue, în care se definește operația de derivare prin relația (4), însă această operație nu mai corespunde derivatei obișnuite.

Fie P spațiul polinoamelor definite pe segmentul [0,1], normat cu

$$\| x \| = \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant n}} | x^{(k)}(t) | \qquad (6)$$

unde n este gradul polinomului x.

Propoziția 2. *Operația de derivare este un operator continuu de normă 1 în spațiul P.*

Demonstrația este aceeași ca pentru propoziția 1.

Definiția 4. *Numim spațiu Banach de distribuții pe segmentul* [0,1] *spațiul P^* al funcționalelor liniare și continue definite pe spațiul P.*

Operația de derivare în P^*, definită prin relația (4) este un operator continuu, însă nu mai corespunde derivatei obișnuite, cum ușor se poate vedea aplicînd integrarea prin părți la fel ca în alineatul precedent (aici funcționalele definite de funcții sînt date de relația

$$< x, \varphi > = \int_0^1 x(t)\, \varphi(t)\, dt).$$

Deosebirea dintre derivata obișnuită și derivata în P^* poate fi utilizată pentru integrarea ecuațiilor diferențiale cu condiții la limită.

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Spațiile studiate în paragrafele 1, 2, 4 și spațiul (C) sînt bine cunoscute în literatura de specialitate. Citățm, de exemplu, S. Banach, [5], Al. Ghika [10], L. A. Liusternik și V. I. Sobolev [17].

Diferite generalizări ale acestor spații au fost date, considerîndu-se spații de funcții definite pe mulțimi mai generale sau cu valori în spații abstracte.

Amintim de asemenea generalizarea dată de W. Orlicz [218] spațiilor (L^p).

Spațiile lui Orlicz se dovedesc de o aplicabilitate importantă în analiza neliniară (M. A. Krasnoselski [174]).

2. Spațiul $(C\,L)$ a fost introdus de C. Ionescu Tulcea și G. Marinescu [139].

3. Spațiile Banach de distribuții au fost introduse de G. Marinescu.

CAPITOLUL XII

EXEMPLE DE FUNCȚIONALE ȘI OPERAȚII LINIARE ÎN DIFERITE SPAȚII PARTICULARE

În acest capitol stabilim forma generală a funcționalelor liniare și continue în spațiile (c), (l^p), cu $p \geqslant 1$, (C), (L^p) cu $p \geqslant 1$ și dăm exemple de operatori complet continui în spațiul (C) și de operații relativ complet continue față de spațiile (C) și (CL).

De asemenea arătăm printr-un exemplu că există operații relativ complet continue care verifică toate condițiile cerute în capitolul VIII, paragraful 6, dar nu sînt complet continue.

§ 1. Forma funcționalelor liniare mărginite în spațiul (c)

Teoremă. *Orice funcțională liniară mărginită definită pe spațiul* (c) *este de forma*

$$f(x) = a \lim_{i \to \infty} x^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

și

$$\| f \| = | a | + \sum_{i=1} | a_i |.$$

Demonstrație. Fie

$$x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{„ } i \neq j \end{cases},$$

$$x_i = \{ x_i^j \}_{j \in N}, \qquad x' = \{ x_j^j \}_{j \in N}.$$

Dacă x este un element oarecare din (c), $x = \{ x_i^j \}_{i \in N}$

și $x^0 = \lim_{i \to \infty} x^i$, atunci

$$x = x^0 x' + \sum_{i=1}^{\infty} (x^i - x^0) x_i.$$

Într-adevăr

$$\| x - x^0 x' - \sum_{i=1}^{k} (x^i - x^0) x_i \| = \sup_{k < i < \infty} | x^i - x^0 | .$$

Fie acum f o funcțională liniară și mărginită și

$$f(x_i) = a_i, \quad f(x)' = a'.$$

Atunci

$$f(x) = x^0 f(x') + \sum_{i=1}^{\infty} (x^i - x^0) f(x_i) =$$

$$= x^0 a' + \sum_{i=1}^{\infty} (x^i - x^0) a_i .$$

Vom arăta că seria $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ este absolut convergentă. Pentru aceasta folosim șirul

$$x_k = \{ x_k^i \}_{i \in N},$$

unde

$$x_k^i = \begin{cases} \dfrac{|a_i|}{a_i} & \text{dacă} \quad i \leqslant k \\ 0 & \text{dacă} \quad i > k. \end{cases}$$

Avem

$$x_k^0 = \lim_{i \to \infty} x_k^i = 0,$$

de unde

$$f(x_k) = \sum_{i=1}^{k} | a_i | .$$

Cum

$$| f(x_k) | \leqslant \| f \| \ \| x_k \| = \| f \|,$$

rezultă

$$\sum_{i=1}^{k} | a_i | \leqslant \| f \|,$$

oricare ar fi $k \in N$ prin urmare seria $\sum_{i=1}^{\infty} | a_i |$ este într-adevăr absolut convergentă.

Dacă punem

$$a = a' - \sum_{i=1}^{\infty} | a_i | ,$$

obținem

$$f(x) = x^0 a + \sum_{i=1} a_i x_i .$$

Fie acum

$$x_0^j = \begin{cases} \dfrac{|a_j|}{a_j} & \text{dacă} \quad j \leqslant k \\ \dfrac{|a|}{a} & \text{dacă} \quad j > k \end{cases}$$

și $x_0 = \{ x_0^j \}_{j \in N}$. Atunci $\| x_0 \| = 1$ și

$$x^0 = \lim x_0^j = \frac{|a|}{a},$$

deci

$$f(x_0) = a + \sum_{i=1}^{k} |a_i| + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \frac{|a|}{a} \leqslant \| f \|,$$

oricare ar fi $k \in N$, prin urmare

$$|a| + \sum_{i=1} |a_i| \leqslant \| f \|.$$

De altă parte

$$\| f(x) | \leqslant (|a| + \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|) \| x \|,$$

de unde

$$| f \| \leqslant |a| + \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

și teorema este complet demonstrată.

§ 2. Forma generală a funcționalelor liniare mărginite în spațiile (l^p) $(p \geqslant 1)$

T e o r e m ă. *Orice funcțională liniară mărginită, f, definită pe spațiul* (l^p) *este de forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

cu

$$\| f \| = \sup |a_i|, \quad \textit{dacă} \quad p = 1$$

și

$$\| f \| = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^q)^{1/q},$$

unde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ \textit{dacă} \ p > 1.$$

D e m o n s t r a ț i e. Fie

$$x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$$

și

$$x_i = \{ x_i^j \}_{j \in N}, \qquad (i = 1, \ldots, n, \ldots).$$

Dacă $x = \{ x^i \}_{i \in N}$ este un punct oarecare al spațiului (l^p), avem

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} x^i x_i \| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} | x^i |^p \right)^{1/p},$$

deci

$$\lim_{n \to \infty} \| x - \sum_{i=1}^{n} x^i x_i \| = 0.$$

Fie acum o funcțională liniară și continuă f și $f(x_i) = a_i$.

Atunci

$$\lim_{n \to \infty} | f(x) - \sum_{i=1}^{n} x^i f(x_i) | \leqslant \| f \| \lim_{n \to \infty} \| x - \sum x^i x_i \| = 0,$$

de unde

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i a_i.$$

Să calculăm acum norma $\| f \|$:

Cazul $p = 1$. Fie :

$$x_k^i = \begin{cases} \dfrac{| a_i |}{a_i} & \text{dacă} \quad i = k \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq k \end{cases}$$

și

$$x_k = \{ x_k^i \}_{i \in N}, \qquad (k = 1, \ldots).$$

Atunci $\| x_k \| = 1$ și pentru orice k

$$| a_k | = f(x_k) \leqslant \| f \| \cdot \| x \| = \| f \|.$$

De altă parte, pentru orice punct $x \in (l^1)$, $x = \{ x^i \}$,

$$| f(x) | = | \sum_{i=1}^{\infty} x^i a_i | \leqslant \left(\sum_{i=1} | x^i | \right) \sup_{i \in N} | a_i | = \| x \| \sup_{i \in N} | a_i |,$$

de unde

$$\| f \| \leqslant \sup_{i \in N} | a_i |.$$

Am arătat deci că $\| f \| = \sup_{i \in N} | a_i |$.

Cazul $p > 1$. Fie

$$x_k^i = \begin{cases} | a_i |^{q-2} a_i & \text{dacă} \quad i \leqslant k \\ 0 & \text{dacă} \quad i > k, \end{cases}$$

unde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

și

$$x_k=\{x_k^i\}_{i\in N},\quad (k=1,2,\ldots).$$

Atunci

$$\|x_k\|=\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^{(q-1)p}\right)^{1/p}=\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{1/p}$$

și pentru orice k

$$\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q=f(x_k)\leqslant\|f\|\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{1/p},$$

deci

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant\|f\|,$$

sau

$$\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|,$$

de unde deducem

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^q\right)^{1/q}\leqslant\|f\|.$$

De altă parte, pentru orice punct $x\in(l^p)$, $x=\{x^i\}_{i\in N}$, este valabilă inegalitatea lui Hölder

$$|f(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}x^i a_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x^i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right)^{1/q}$$

de unde deducem

$$\|f\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right)^{1/q}.$$

Am demonstrat deci că în acest caz

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^q\right)^{1/q}.$$

§ 3. Forma generală a funcționalelor liniare mărginite în spațiul (C)

1. Teoremă. *Fie (C) spațiul funcțiilor reale continue definite pe segmentul* [0,1].

Orice funcțională liniară și mărginită definită pe (C) este o integrală Stieltjes

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,d\alpha(t),$$

unde $\alpha(t)$ este o funcție cu variația mărginită, care nu depinde de x și

$$\| f \| = \operatorname*{var}_{t \in [0,1]} \alpha(t).$$

Demonstrație. Am văzut că spațiul (C) este echivalent (izometric) cu subspațiul Banach $(\mathfrak{c})$ al spațiului (M).

Fie f o funcțională liniară mărginită definită pe $(\mathfrak{c})$. Există o funcțională liniară și mărginită g, definită pe (M), astfel ca

$$g(x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in (\mathfrak{c})$$

și

$$\| g \| = \| f \|$$

Fie

$$\xi_t(u) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } 0 \leqslant u \leqslant t \\ 0 & \text{dacă } t < u \leqslant 1 \end{cases}$$

și $x_t \in (M)$ clasa de funcții care are ca reprezentant funcția $\xi_t(u)$. Considerăm funcția definită de relația

$$g(x_t) = \alpha(t).$$

Funcția $\alpha(t)$ are variația mărginită.

Într-adevăr, fie

$$(\delta): \ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$$

o diviziune finită a segmentului $[0,1]$ și

$$\varepsilon_i = \frac{|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|}{\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})}.$$

Atunci

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})) =$$

$$= g\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}})\right] \leqslant \| g \| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right\|.$$

Însă

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_{t_i} - x_{t_{i-1}}) \right\| = \operatorname*{ad.\,max.}_{u \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\xi_{t_i}(u) - \xi_{t_{i-1}}(u)) \right| = 1$$

pentru că funcția $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\xi_{t_i}(u) - \xi_{t_{i-1}}(u))$ are un număr finit de puncte de discontinuitate și ia numai valorile $+1$ sau -1.

Rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \leqslant \| g \| = \| f \|$$

deci $\alpha(t)$ este o funcție cu variația mărginită:

$$\operatorname*{var}_{t \in [0,1]} \alpha(t) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})| \leqslant \| f \|,$$

marginea superioară fiind relativă la toate diviziunile finite ale segmentului [0,1].

Considerăm acum mulțimea Δ a diviziunilor finite δ.

Notăm

$$N(\delta) = \max \mid t_i - t_{i-1} \mid,$$

unde t_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt punctele diviziunii δ și numim numărul $N(\delta)$ amplitudinea diviziunii δ.

Prin definiție, dacă $x(t)$ este o funcție continuă, funcționala

$$I(x) = \lim_{\Delta} \sum_{\delta} x(v_i) \; [\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})], \quad (t_{i-1} \leqslant v_i \leqslant t_i) \qquad (1)$$

este integrala Stieltjes a funcției $x(t)$ relativ la funcția cu variația mărginită $\alpha(t)$

$$\int_0^1 x(t)\, d\,\alpha(t).$$

Limita din expresia (1) se definește astfel:

pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta > 0$, astfel încît $N(\delta) < \eta$ implică

$$\left| I - \sum_{\delta} \right| < \varepsilon.$$

Se știe că această limită este egală cu limita după un șir de diviziuni de amplitudine tinzînd către 0.

Considerăm diviziunile date de punctele

$$t_i = \frac{i}{n}, \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

și construim funcția

$$z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x\left(\frac{i}{n}\right) [\xi_{\frac{i}{n}}(t) - \xi_{\frac{i-1}{n}}(t)].$$

Avem

$$f(z_n) = \sum_{i=1}^{n} x\left(\frac{i}{n}\right)\left[\alpha\left(\frac{i}{n}\right) - \alpha\left(\frac{i-1}{n}\right)\right],$$

de unde deducem

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = \int_0^1 x(t)\, d\,\alpha(t).$$

Am demonstrat astfel că orice funcțională liniară continuă definită pe spațiul (C) este o integrală Stieltjes.

Ne rămîne să arătăm că

$$\| f \| = \operatorname*{var.}_{t \in [0,1]} \alpha(t).$$

Am demonstrat inegalitatea

$$\operatorname*{var.}_{t \in [0,1]} \alpha(t) \leqslant \| f \|$$

și trebuie să mai demonstrăm inegalitatea contrară.

Avem

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,d\alpha(t)\right| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \operatorname*{var}_{t\in[0,1]} \alpha(t) = \|x\| \cdot \operatorname*{var}_{t\in[0,1]} \alpha(t)$$

de unde deducem

$$\|f\| \leqslant \operatorname*{var}_{t\in[0,1]} \alpha(t).$$

și teorema este complet demonstrată.

2. Se poate vedea ușor că, invers, orice integrală Stieltjes de forma de mai sus este o funcțională liniară continuă, definită pe spațiul (C).

§ 4. Forma generală a funcționalelor liniare și mărginite în spațiile (L^p) $(p \geqslant 1)$

T e o r e m a. *Orice funcțională liniară și mărginită $f(x)$ definită pe spațiul (L^p) este de forma*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,a(t)\,dt,$$

unde funcția $a \in (L^p)$, dacă $p > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

sau $a \in (M)$, dacă $p = 1$.

Norma funcționalei f este

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |a(t)|^q\,dt\right)^{1/q}, \quad \text{dacă} \quad p > 1$$

sau

$$\|f\| = \operatorname*{ad.max}_{t\in[0,1]} |a(t)|, \quad \text{dacă} \quad p = 1.$$

D e m o n s t r a ț i e. Definim funcția $\alpha(t)$ la fel ca în cazul spațiului (C). Vom arăta că în acest caz funcția $\alpha(t)$ este absolut continuă, deci există o funcție sumabilă $a(t)$, astfel ca

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t a(t)\,dt.$$

Fie $H_1, H_2, \ldots, H_n$, n segmente incluse în $[0,1]$ și având în comun cel mult extremitățile t_i, t_i'.

Notăm

$$\varepsilon_i = \frac{|\alpha(t_i') - \alpha(t_i)|}{\alpha(t_i') - \alpha(t_i)}.$$

Atunci

$$\sum |\alpha(t_i') - \alpha(t_i)| = \sum \varepsilon_i (x(t_i') - x(t_i)) =$$
$$= f\left(\sum a t_i' (\xi_{t_i} - \xi_{t_i})\right) \leqslant \|f\| \left\| \sum \varepsilon_i (\xi_{t_i} - \xi_{t_i}) \right\|$$

Însă funcția $\sum (\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}) \varepsilon_i$ are valoarea $\varepsilon_i = \pm 1$ în H_i și 0 în $[H_i$, deci

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\xi_{t_i'} - \xi_{t_i}) \varepsilon_i \right\| = \left(\int_0^1 | \sum \varepsilon_i [\xi_{t_i'}(u) - \xi_{t_i}(u)] |^p du \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} m(H_i) \right)^{1/p},$$

unde $m(H_i)$ este lungimea intervalului H_i.

Prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} | \alpha(t_i') - \alpha(t_i) | \leqslant \| f \| \left(\sum_{i=1}^{n} m(H_i) \right)^{1/p},$$

de unde rezultă că funcția $\alpha(t)$ este absolut continuă.

Există deci o funcție sumabilă $a(t)$, astfel ca

$$\alpha(t) - \alpha(0) = \int_0^t a(u)\, du.$$

De altă parte $\xi_0 = 0$, deci

$$a(0) = f(0) = 0$$

și prin urmare

$$f(\xi_t) = \int_0^t a(u)\, du,$$

sau încă

$$f(\xi_t) = \int_0^1 \xi_t(u)\, a(u)\, du,$$

pentru că $\xi_t(u) = 0$, pentru $u > t$.

Considerăm acum funcțiile în scară $y(u)$ definite de diviziunile finite δ

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$$

și șirurile finite de numere $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, astfel ca

$$y(u) = \lambda_i, \quad \text{pentru} \quad t_{i-1} \leqslant u < t_i,$$

de unde deducem

$$y(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\xi_{t_i}(u) - \xi_{t_{i-1}}(u)].$$

Pentru aceste funcții,

$$f(y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 (\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}})\, a(u)\, du =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum \lambda_i (\xi_{t_i} - \xi_{t_{i-1}}) \right) a(u)\, du = \int_0^1 y(u)\, a(u)\, du.$$

Deci pentru funcțiile în scară, funcționala are forma anunțată.

Fie acum $x(t)$ o funcție mărginită și măsurabilă. Există un șir $\{y_n(t)\}$ de funcții în scară, convergent aproape peste tot către $x(t)$ și astfel ca

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\, x(t) - y_n(t)\,|^p\, dt = 0,$$

adică astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} \| x - y_n \| = 0.$$

În consecință, funcționala f fiind continuă,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 y_n(t)\, a(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, a(t)\, dt.$$

Trecem acum la funcțiile $x(t)$ aparținînd spațiului (L^p) cu $p > 1$. Să notăm

$$a_n(t) = \begin{cases} |\, a(t)\,|^{q-2}\, a(t) & \text{dacă } |\, a(t)\,|^{q-1} < n^{1/p} \\ n^{1/p}\,\dfrac{|\, a(t)\,|}{a(t)} & \text{dacă } |\, a(t)\,|^{q-1} \geqslant n^{1/p}. \end{cases}$$

Avem

$$|\, f(a_n)\,| = \left|\int_0^1 a_n(t)\, a(t)\, dt\right| \leqslant \|f\| \left(\int_0^1 |\, a_n(t)\,|^p\, dt\right)^{1/p}$$

și cum

$$a_n(t)\, a(t) = |\, a_n(t)\,| \cdot |\, a(t)\,| \geqslant |\, a_n(t)\,| \cdot |\, a_n(t)\,|^{\frac{1}{q-1}}$$

rezultă că

$$\int_0^1 |\, a_n(t)\,|^{q/q-1}\, dt \leqslant \|f\| \left(\int_0^1 |\, a_n(t)\,|^p\, dt\right)^{1.p}$$

deci

$$\left(\int_0^1 |\, a_n(t)\,|^p\, dt\right)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

De altă parte

$$|\, a_n(t)\,|^p = |\, a(t)\,|^{p(q-1)} = |\, a(t)\,|^q$$

dacă $|\, a(t)\,|^{q-1} < n^{1/p}$, adică dacă $|\, a(t)\,|^{p(q-1)} < n$

și

$$|\, a_n(t)\,|^p = n$$

dacă $|\, a(t)\,|^{p(q-1)} \geqslant n$.

Funcția $|\, a_n(t)\,|^p$ tinde către $|\, a(t)\,|^q$ dacă $|\, a(t)\,|^q < n$ și

$$|\, a_n(t)\,|^p \leqslant |\, a_{n+1}(t)\,|^p$$

deci șirul integralelor

$$\int_0^1 |\, a_n(t)\,|^p\, dt$$

este nedescrescător; fiind și mărginit, este convergent.

Rezultă că $|a(t)|^q$ este sumabilă și

$$\left(\int_0^1 |a(t)|^q\,dt\right)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

Dacă $x(t)$ este o funcție p — sumabilă cu $p>1$, fie

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t) & \text{dacă } |x(t)|<n^{1/p} \\ n^{1/p}\dfrac{|x(t)|}{x(t)} & \text{dacă } |x(t)|\geqslant n^{1/p}. \end{cases}$$

Diferența $x(t)-x_n(t)$ este de asemenea p - sumabilă și $x(t)-x_n(t)=0$ dacă $x(t)<n^{1/p}$.

Dacă I_n este mulțimea punctelor din $[0,1]$, pentru care $x(t)\geqslant n^{1/p}$, atunci

$$\left(\int_0^1 |x(t)-x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=\left(\int_{I_n} |x(t)-x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{I_n}|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\left(\int_{I_n}|x_n(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Funcția $|x(t)|^p$ fiind sumabilă,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_n}|x(t)|^p\,dt=0$$

și

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot m(I_n)=0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\|x-x_n\|=0.$$

Funcționala $f(x)$ fiind continuă, rezultă că

$$f(x)=\lim f(x_n)=\int_0^1 x(t)\,a(t)\,dt.$$

De altă parte,

$$|f(x)|=\left|\int_0^1 x(t)\,a(t)\,dt\right|\leqslant\|x\|\left(\int_0^1|a(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

deci

$$\|f\|\leqslant\left(\int_0^1|a(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Cum inegalitatea contrară a fost demonstrată mai înainte, rezultă că

$$\|f\|=\left(\int_0^1|a(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Cazul $p=1$. Fie u și $u+h$ două numere din intervalul $(0,1)$ și

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h} & \text{pentru } u\leqslant t\leqslant u+h \\ 0 & \text{pentru } 0\leqslant t<u \text{ și } u+h<t<1.\end{cases}$$

Funcția $x(t)$ fiind o funcție în scară,

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\, a(t)\, dt\right| = \frac{1}{h}\int_u^{u+h} a(t)\, dt.$$

Însă

$$|f(x)| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| = \|f\|$$

deci

$$\left|\int_u^{u+h} a(t)\, dt\right| \leqslant \|f\| \cdot h,$$

adică funcția

$$\alpha(t) = \int_0^u a(t)\, dt$$

satisface condiția lui Lipschitz. Deoarece $\alpha(t)$ are aproape peste tot, derivată

$$\alpha'(t) = a(t)$$

rezultă că

$$|a(t)| \leqslant \|f\|,$$

aproape peste tot.

Fie acum $x(t) \in L^{(1)}$. Punem

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pentru} \quad |x(t)| \leqslant n \\ n\dfrac{|x(t)|}{x(t)} & \text{pentru} \quad |x(t)| > n. \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |x(t) - x_n(t)|\, dt = 0,$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0.$$

Funcționala $f(x)$ fiind continuă,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)\, a(t)\, dt.$$

De altă parte

$$\left|\int_0^1 x(t)\, a(t)\, dt\right| \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|\, dt\right) \text{ad. } \max_{t\in[0,1]} |a(t)|,$$

deci

$$\|f\| \leqslant \text{ad. max } |a(t)|.$$

§ 5. Operatori complet continui în spațiul (C)

1. Fie (C) spațiul funcțiilor reale, continue, definite pe segmentul $[0,1]$.

Considerăm operatorul T definit pe spațiul (C) de

$$T(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{1}$$

unde $K(s,t)$ este o funcție cu valori reale continuă în patratul $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Funcția

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

este o funcție continuă definită pe segmentul $[0,1]$, pentru că

$$| y(s) - y(s_0) | = \left| \int_0^1 (K(s,t) - K(s_0, t)\, x(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [0,1]} | K(s,t) - K(s_0, t) | \cdot \left| \int_0^1 x(t)\, dt \right|,$$

deci $y \in (C)$.

2. Operatorul T definit de relația (1) este continuu.

Într-adevăr, fie

$$M = \max_{0 \leqslant s, t \leqslant 1} | K(s,t) |;$$

atunci

$$\| y \| = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} | y(s) | \leqslant M \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) | = M \| x \|, \tag{2}$$

de unde rezultă că operatorul T este mărginit, deci continuu.

Să calculăm norma acestui operator. Din (2) rezultă că numărul M majorează norma lui T:

$$\| T \| \leqslant \max_{0 \leqslant s, t \leqslant 1} | K(s,t) |. \tag{3}$$

Vom arăta, precis, că

$$\| T \| = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 | K(s, t) |\, dt. \tag{4}$$

Într-adevăr

$$\| T(x) \| = \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \left| \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \right| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) | \cdot \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 | K(s,t) |\, dt.$$

Deci

$$\| T \| \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 | K(s, t) |\, dt. \tag{5}$$

Ne rămîne să demonstrăm inegalitatea contrară.

Funcția

$$\int_0^1 | K(s,t) | \, dt$$

fiind continuă în s, își atinge maximum într-un punct $s_0 \in [0,1]$. Fie

$$z_0(t) = \frac{K(s_0, t)}{| K(s_0, t) |}.$$

Considerăm un șir de funcții continue $\{x_n(t)\}$, astfel încît $| x_n(t) | \leqslant 1$ și

$$x_n(t) = z_0(t)$$

în afara unei mulțimi $e \subset [0,1]$, de măsură mai mică decît $\frac{1}{2Mn}$.

Pentru orice $t \in e$, avem

$$| x_n(t) - z_0(t) | \leqslant 2.$$

Atunci, pentru orice $s \in [0,1]$,

$$\left| \int_0^1 K(s,t) z_0(t) \, dt - \int_0^1 K(s,t) x_n(t) \, dt \right| \leqslant \int_0^1 | K(s,t) | \cdot | x_n(t) - z_0(t) | \, dt =$$

$$= \int_e | K(s,t) | \cdot | x_n(t) - z_0(t) | \, dt \leqslant 2 \max_{0 \leqslant s,\, t \leqslant 1} | K(s,t) | \cdot \frac{1}{2Mn} = \frac{1}{n},$$

deci

$$\int_0^1 | K(s,t) \| z_0(t) | \, dt \leqslant \int_0^1 | K(s,t) \| x_n(t) | \, dt + \frac{1}{n} \leqslant \| T \| \cdot \| x_n \| + \frac{1}{n}.$$

Punînd în această inegalitate $s = s_0$, obținem

$$\int_0^1 | K(s_0, t) | \, dt \leqslant \| T \| \cdot \| x_n \| + \frac{1}{n} \leqslant \| T \| + \frac{1}{n}.$$

Trecînd la limită pentru $n \to \infty$, obținem

$$\int_0^1 | K(s_0, t) | \, dt \leqslant \| T \|,$$

deci

$$\max_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_1^0 | K(s,t) | \, dt \leqslant \| T \|.$$

Aceasta, împreună cu (5), ne demonstrează egalitatea (4).

3. Operatorul T, definit de relația (1), este complet continuu.

Într-adevăr, fie $\{ x_\alpha \}_{\alpha \in I}$ o mulțime mărginită de elemente ale spațiului (C),

$$\| x_\alpha \| \leqslant \mu.$$

Este evident că și mulțimea funcțiilor

$$y_\alpha = T(x_\alpha)$$

este mărginită :

$$\| y_\alpha \| \leqslant \| T \| \mu.$$

Vom arăta că această mulțime este și egal continuă.

Fie $\varepsilon > 0$ dat; deoarece funcția $K(s, t)$ este uniform continuă, există $\eta > 0$, astfel încît

$$| s_1 - s_2 | < \eta$$

implică

$$| K(s_1, t) - K(s_2, t) | < \frac{\varepsilon}{\mu},$$

pentru orice $t \in [0,1]$ și deci

$$| y_\alpha(s_1) - y_\alpha(s_2) | \leqslant \int_0^1 | K(s_1, t) - K(s_2, t) | \cdot | x_\alpha(t) | \, dt,$$

pentru orice $\alpha \in I$.

Putem aplica atunci criteriul de compactitudine al lui Arzela și obținem că mulțimea $\{ y_\alpha \}_{\alpha \in I}$ este relativ compactă în (C). Rezută deci că T este complet continuu.

§ 6. Exemple de operații liniare relativ complet continue

1. Fie Q o mulțime metrică și compactă și (C) și (CL) spațiile Banach corespunzătoare.

Fie, mai departe, Σ o mulțime oarecare, F o clasă aditivă de părți din Σ și $P(t, A)$ o funcție complexă definită pe $E \times F$, și avînd proprietățile:

P_1. Pentru t fix, variația totală a lui $P(t, A)$ este cel mult egală cu 1.

P_2. Pentru t fix, $P(t, A)$ este complet aditivă pe F.

P_3. Pentru orice A, t_1, t_2 avem

$$| P(t_1, A) - P(t_2, A) | \leqslant p \, D(t_1, t_2),$$

p fiind o constantă și $D(t_1, t_2)$ distanța între t_1 și t_2.

Vom atașa la fiecare element $\xi \in \Sigma$ o transformare univocă $y(t, \xi)$ a lui Q în Q satisfăcînd următoarele condiții:

1) Există o constantă $0 < r < 1$, astfel încît

$$D(y(t_1, \xi), y(t_2, \xi) < r D(t_1, t_2),$$

oricare ar fi $t_1 \in Q$, $t_2 \in Q$, $\xi \in \Sigma$.

2) Pentru t fix și pentru orice mulțime boreliană $Q_b \subset Q$,

$$\{ \xi \mid y(t, \xi) \in Q_b \} \in F.$$

Cu ajutorul acestor noțiuni vom introduce operația

$$T(x(t)) = \int_\Sigma P(t, d\xi) \, x(\varphi(t, \xi)).$$

Folosind egalitatea

$$y(t_1) - y(t_2) = \int_\Sigma P(t_1, d\xi) \{ x[\varphi(t_1, \xi)] - x[\varphi(t_2, \xi)] \} -$$

$$- \int_\Sigma \{ P(t_2, d\xi) - P(t_1, d\xi) \} \, x[\varphi(t_2, \xi)],$$

unde

$$y = T(x),$$

obținem

$$m(y) \leqslant r\, m(x) + 4p \max x(t),$$

de unde

$$y \in (CL)$$

și

$$\|y\|_{CL} \leqslant r \|x\|_{CL} + (4p+1)\|x\|_C.$$

Astfel se stabilește că operația T satisface condițiile i), ii'), iii), α), β) (cap. VIII, § 6).

Dacă mulțimea Σ are numai un număr finit de elemente, operația T este de forma

$$T(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)\, x(\varphi_i(t)).$$

2. Exemplu de operație relativ complet continuă dar necomplet continuă.

Un caz particular foarte simplu al operației T este

$$T(x(t)) = x\left(\frac{t}{2}\right) \tag{1}$$

Vom demonstra că nici o iterată a operației (1) nu este complet continuă.

Fie, pentru aceasta, șirul

$$x_j(t) = \begin{cases} t \text{ dacă } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{j} \\ \frac{1}{j} \text{ dacă } \frac{1}{j} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Se vede ușor că

$$\|x_j(t)\|_{CL} \leqslant 1,$$

adică $\{x_j\}$ este un șir mărginit în (CL).

De altă parte,

$$\|T^m(x_j(t))\|_{CL} = \left\| x_j\left(\frac{t}{2^m}\right) \right\|_{CL} \geqslant 1/2^m$$

Rezultă că șirul $\{T^m(x_j)\}$ $(j = 1, 2, \ldots, m \text{ fix})$ nu poate fi compact în (CL).

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Formele generale de funcționale liniare date de noi sînt clasice. Pentru spațiul (C) al funcțiilor continue definite pe un segment, forma generală a funcționalelor liniare a fost stabilită de F. Riesz.

A. A. Markov a generalizat rezultatul lui Riesz la cazul funcțiilor reale continue definite pe un compact.

L. V. Kantorovici și G. M. Fichtenholț au stabilit forma funcționalelor liniare continue în spațiul (M), al funcțiilor măsurabile și mărginite [85].

A. P. Artemenko [40] și I. Grosberg [126] au găsit, aproape simultan, forma funcționalelor liniare continue în spațiul funcțiilor cu variația mărginită.

De asemenea B. I. Levin și S. G. Krein au găsit forma funcționalelor liniare continue pentru clase noi de spații Banach și au arătat că aceste rezultate permit generalizarea cercetărilor lui Lebesgue, D. K. Fadeev, I. P. Natanson și B. I. Corenbliu m asupra reprezentării funcțiilor cu ajutorul integralelor singulare.

2. O aplicație importantă a formelor generale ale funcționalelor liniare continue o constituie rezolvarea problemei momentelor în diferite cazuri.

3. Problema găsirii formei generale se pune și pentru celelalte operații liniare. În această privință, I. M. Ghelfand a făcut primul pas esențial, în dizertația sa de candidat, susținută în anul 1934. El a găsit forma operațiilor liniare continue care aplică spațiile (C), (L^1) sau (l^1) în orice spațiu Banach. De asemenea, a rezolvat aceeași problemă pentru cazul operațiilor liniare care aplică un spațiu Banach oarecare în funcțiile cu variația mărginită, sau în spațiile (M), (l^1), (c). Rezultate analoge a stabilit și pentru operațiile complet continue.

CAPITOLUL XIII

APLICAȚII LA TEORIA ECUAȚIILOR INTEGRALE

Teoria ecuațiilor integrale poate fi conținută în întregime în cadrul analizei funcționale, care de altfel își datorează dezvoltarea, cel puțin inițială, cercetărilor asupra ecuațiilor integrale.

Noi nu vom dezvolta însă aici o teorie completă a ecuațiilor integrale, ci vom da numai aplicațiile imediate ale capitolelor anterioare. Lăsăm la o parte aplicațiile spațiilor Hilbert, pentru care este necesar un studiu special.

§ 1. Ecuații de tip Fredholm

1. Considerăm ecuația

$$x(s) = y(s) + \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{1}$$

unde $K(s, t)$ este o funcție continuă cu valori în corpul scalarilor K definită pe patratul $0 \leqslant s \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Aceasta este o ecuație de forma

$$x - T(x) = y,$$

T fiind un operator complet continuu definit pe spațiul (C). Funcția $K(s, t)$ se numește nucleul operatorului T.

Teorema 1 din capitolul VII, paragraful 1, ne dă imediat următorul rezultat:
dacă

$$\| T \| = \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 | K(s, t) |\, dt < 1,$$

atunci pentru orice funcție $y(s) \in (C)$ există o soluție unică $x(s) \in (C)$ dată de relația

$$x = (I + T + T^2 + \ldots + T^n + \ldots)\,(y). \tag{2}$$

Operatorul T^n este dat de

$$T^n(y) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(s, t_{n-1})\, K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots K(t_1, t)\, y(t)\, dt_{n-1}, dt_{n-2} \ldots$$
$$\ldots dt_1\, dt.$$

Se notează deobicei

$$K_n(s,\ t) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(s,\ t_{n-1})\, K(t_{n-1},\ t_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots K(t_1,\ t)\ dt_{n-1},\ dt_{n-2} \ldots dt_1,\ n \geqslant 2$$

și atunci relația (2) are forma

$$x(s) = y(s) + \int_0^1 K_1(s,t)\, y(t)\, dt + \int_0^1 K_2(s,t)\, y(t)\, dt + \ldots$$

$$= y(s) + \int_0^1 [K_1(s,t) + K_2(s,t) + \ldots + K_n(s,t) + \ldots]\, y(t)\, dt.$$

Funcția

$$R(s,\ t) = K_1(s,t) + K_2(s,t) + \ldots + K_n(s,t) + \ldots$$

se numește nucleu rezolvant.

2. Considerăm, mai departe, ecuația

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt, \tag{3}$$

care depinde de parametrul complex λ, funcția $K(s,\ t)$ fiind la fel ca în cazul ecuației (1).

Punînd $\lambda = \frac{1}{\mu}$, ecuația (3) are forma

$$y(s) = \mu\, x(s) - \int_0^1 K(s,\ t)\, x(t)\, dt \tag{4}$$

sau

$$y = (\mu I - T)(x). \tag{5}$$

La fel ca în cazul ecuației (1), putem enunța următorul rezultat: dacă

$$\| \lambda T \| = |\lambda| \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} \int_0^1 |K(s,t)|\, dt < 1,$$

atunci ecuația (3) are, pentru orice funcție $y(s) \in (C)$ o soluție unică $x(s) \in (C)$ dată de relația

$$x = (I + \lambda T + \lambda^2 T^2 + \ldots + \lambda^n T^n + \ldots)(y) \tag{6}$$

sau

$$x(s) = y(s) + \int_0^1 [\lambda K_1(s,t) + \lambda^2 K_2(s,t) + \ldots +$$

$$+ \lambda^n K_n(s,t) + \ldots]\, y(t)\, dt. \tag{7}$$

Funcția

$$R(s,t,\lambda) = \lambda K_1(s,t) + \lambda^2 K_2(s,t) + \ldots + \lambda^n K_n(s,t) + \ldots$$

se numește de asemenea nucleul rezolvant al ecuației (4).

Teorema 2 din capitolul VII, paragraful 1, ne dă însă și alte posibilități de rezolvare a ecuației (4).

Dacă se cunoaște o valoare λ_0 astfel încît operatorul $\lambda_0 T$ să fie inversabil, atunci pentru orice λ dintr-o vecinătate convenabilă (dată de teorema 2, cap. VIII, § 1) a lui λ_0 se poate scrie soluția ecuației (4) sub formă de funcție olomorfă în λ.

3. Studiul general al ecuației (1) a fost dat de către F r e d h o l m, ale cărui rezultate sînt cazuri particulare ale teoremelor de la capitolul VIII, paragraful 2. Putem enunța

P r o p o z i ț i a 1. *Ecuația omogenă corespunzătoare ecuației* (1) *are cel mult un număr finit de soluții liniar independente. La fel și iteratele ecuației omogene.*

P r o p o z i ț i a 2. *Condiția necesară și suficientă pentru ca ecuația* (1) *să admită o soluție unică pentru orice* $y \in (C)$ *este ca ecuația omogenă corespunzătoare să admită numai soluția identic nulă.*

P r o p o z i ț i a 3. *Există numai un număr finit de valori proprii de modul 1 ale ecuației omogene.*

P r o p o z i ț i a 4. *Există un întreg,* ν, *astfel că pentru orice* $n > \nu$; *iterata de ordin n a ecuației omogene are numai soluția identic nulă.*

§ 2. Ecuații apropiate

1. Considerăm din nou ecuația lui Fredholm de a doua speță

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \qquad (1)$$

în spațiul (C) al funcțiilor reale de variabilă reale, periodice de perioadă 1.

Pentru calculul cu aproximație al soluțiilor acestei ecuații, putem folosi metoda dată la capitolul X.

Spațiul E este deci spațiul (C); ca spații $\widetilde{E}$ și E' vom lua, respectiv, spațiul R_n, al punctelor

$$\widetilde{x} = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n),$$

normat prin

$$\|\widetilde{x}\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi^i|$$

și spațiul liniilor poligonale periodice avînd vîrfurile de abscise

$$t_n^k = \frac{2k-1}{n}, \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Se vede ușor că spațiile $\widetilde{E}$ și E' astfel alese sînt izomorfe algebric și în normă. Transformarea φ este dată în acest caz de relația

$$\widetilde{x} = \varphi(x) = (x(t_n^1), x(t_n^2), \ldots, x(t_n^n)), \ x \in (C),$$

iar inversa φ_0^{-1} face să corespundă fiecărui element

$$x = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$$

linia poligonală periodică având vîrfurile în punctele din plan (t_n^k, ξ^k), $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Este evident că

$$\|\varphi\| = \|\varphi_0^{-1}\| = 1.$$

Ca ecuație apropiată ecuației (1), considerăm sistemul de ecuații

$$x(t_n^i) = y(t_n^i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} K(t_n^i, t_n^k)\, x(t_n^k), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Operatorul T este dat deci de relația

$$T(x) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt,$$

iar operatorul apropiat, $\widetilde{T}$, este matricea

$$\left(\frac{1}{n} K(t_n^i, t_n^k)\right), \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Vom arăta că sînt satisfăcute condițiile *a*), *b*), *c*), capitolul X.

Însemnăm prin $\omega_K^s(\delta)$ și $\omega_K^t(\delta)$ modulele de continuitate ale funcției $K(s, t)$ în raport cu s și t, respectiv; $\omega_K^s(\delta)$ este, de exemplu, cel mai mic număr ω care verifică inegalitatea

$$\max_t |K(s', t) - K(s'', t)| \leqslant \omega \text{ dacă } |s' - s''| \leqslant \delta.$$

Să aproximăm expresia

$$\|\varphi T(x') - \widetilde{T}\varphi(x')\| =$$

$$= \max_i \left| \int_0^1 K(t_i, t)\, x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} K(t_i, t_k)\, x'(t_k) \right|$$

(am notat, pentru simplificare, t_{in}^i prin t_i).

Deoarece funcția x' este liniară în t_k și t_{k+1}, avem

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x'(t)\, dt = \frac{1}{2n} (x'(t_k) + x'(t_{k+1})).$$

Atunci

$$\| \varphi T(x') - \tilde{T} \varphi(x') \| =$$

$$= \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} K(t_i, t)\, x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} K\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) x'(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} K\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) (x'(t_k) + x'(t_{k+1})) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} K(t_i, t_k)\, x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[K(t_i, t) - K\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) \right] x'(t)\, dt \right| +$$

$$+ \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \left[K\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) - K(t_i, t_k) \right] x'(t_k) \right| +$$

$$+ \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \left[K\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) - K(t_i, t_{k+1}) \right] x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\, \omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\, \omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right) \right] \| x' \| = 2\, \omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right) \| x' \|.$$

Deci dacă luăm

$$\varepsilon = 2\, \omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right)$$

condiția *a*) este verificată.

Pentru condiția *b*), considerăm funcțiile de forma

$$g(s) = T(x)(s) = \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt.$$

Ca funcție aproximantă $x' \in E'$ vom lua funcția

$$x'(s) = n(t_{i+1} - s) \int_0^1 K(t_i, t)\, x(t)\, dt +$$

$$+ n(s - t_i) \int_0^1 K(t_{i+1}, t) x(t)\, dt, \quad (t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}).$$

Atunci, pentru $t_1 \leqslant s \leqslant t_{i+1}$, avem

$$| g(s) - x'(s) | = \left| \int_0^1 [K(s,t) - n(t_{i+1} - s) K(t_i, t) - \right.$$

$$\left. - n(s - t_i) K(t_{i+1}, t)] x(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^1 \omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right) | x(t) |\, dt,$$

de unde rezultă

$$\| T(x) - x' \| \leqslant \omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right) \| x \|$$

astfel că putem lua, pentru condiția *b*),

$$\varepsilon_1 = \omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right).$$

Analog găsim, pentru condiția *c*),

$$\varepsilon_2 = \omega_y\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\|y\|},$$

unde $\omega_y(\delta)$ este modulul de continuitate al funcției y.

2. Putem aplica deci teoremele din capitolul X.

Numărul q din teorema din capitolul X, paragraful 1, este, în cazul nostru,

$$q = |\lambda|\left[\|V\|\,\omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right) + 2\omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right) + 2|\lambda|\,\omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right)\omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right)\right]\|V^{-1}\|.$$

Dacă $q < 1$, există operatorul $\widetilde{V}^{-1}$ și

$$\|\widetilde{V}^{-1}\| \leqslant \frac{1 + |\lambda|\omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right)}{1-q}\|V^{-1}\|.$$

Aproximarea soluției exacte prin cea apropiată este dată de

$$\|x^* - \varphi_0^{-1}\widetilde{x}_0\| \leqslant \left\{4|\lambda|\,\omega_k^t\left(\frac{1}{2n}\right)\|\widetilde{V}^{-1}\| + \right.$$

$$\left. + \left(|\lambda|\,\omega_k^s\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\|V\|\,\omega_y\left(\frac{1}{n}\right)}{\|y\|}\right)(1 + \|V\|\,\|\widetilde{V}^{-1}\|\,\|x^*\|\right.$$

De aici se vede că atuuci cînd $n \to \infty$, soluția apropiată tinde uniform către cea exactă.

§ 3. Ecuații cu operatori complet continui pozitivi

1. Considerăm acum ecuația omogenă de tip Fredholm

$$x(s) = \mu\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt, \tag{1}$$

unde $K(s,t)$ este funcție continuă, nenegativă în patratul $0 \leqslant s,t \leqslant 1$. Atunci operatorul T dat de relația

$$T(x) = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt \tag{2}$$

este complet continuu și pozitiv în spațiul (C) și deci putem aplica teoremele de la capitolul VIII, paragraful 4. Obținem astfel

Propoziția 1. *Dacă operatorul T dat de relația* (2) *are valori proprii diferite de zero, atunci el are o valoare proprie pozitivă ρ, egală cu maximul*

modulului tuturor valorilor proprii. Numărului ρ *îi corespunde o funcție nenegativă* $v \in (C)_+$ *astfel încît*

$$\rho v(s) = \int_0^1 K(s,t)\, v(t)\, dt.$$

Propoziția 2. *Dacă există un sistem de puncte* $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\} \subset [0,1]$, *astfel încît*

$$K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \ldots K(s_{p-1}, s_p) > 0,$$

atunci ecuația (1) *are o valoare proprie pozitivă* ρ *egală cu maximul modulului valorilor proprii. Numărului* ρ *îi corespunde cel puțin o funcție proprie nenegativă.*

Propoziția 3. *Dacă nucleul* $K(s,t)$ *este de tip pozitiv adică dacă pentru orice funcție* $x(t) \in (C)_+$, *neidentic nulă, există un* N *astfel încît*

$$\int_0^1 K^{(N)}(s,t)\, x(t)\, dt > 0, \quad (0 \leqslant s, t \leqslant 1),$$

atunci ecuația (1) *are o funcție proprie pozitivă univoc determinată, cu excepția unui factor constant. Aceeași afirmație este valabilă și pentru ecuația adjunctă. Numărul propriu pozitiv corespunzător este egal cu maximul modulului numerelor proprii ale operatorului* T.

Observația 1. Propozițiile 1, 2, 3, sînt valabile și dacă se înlocuiește condiția de continuitate a nucleului $K(s,t)$ prin condițiile

1) Pentru orice $s \in [0,1]$, funcția $K(s,t)$ este măsurabilă și sumabilă în raport cu t;

2) Pentru orice $s \in [0,1]$;

$$\lim_{h \to \infty} \int_0^1 K(s+h,\ t) - K(s,t)\, dt = 0.$$

Observația 2. Aceleași propoziții se pot transpune și pentru un nucleu măsurabil în patratul $0 \leqslant s,t \leqslant 1$ și satisfăcînd condiția

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^2\, ds\, dt,$$

dacă se consideră operatorul T în spațiul (L^2) (a se vedea M. G. Krein și M. A. Rutman [184]).

2. Dacă nucleul $K(s,t)$ este stochastic, adică satisface condiția

$$\int_0^1 K(s,t)dt = 1, \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$

se pot aplica rezultatele de la capitolul IX, paragraful 4 și se obține

Propoziția 4. *a) Toate valorile proprii de modul* 1 *ale ecuației* (1) *cu nucleu stochastic sînt rădăcini ale unității.*

b) Mulțimea funcțiilor proprii ale ecuației (1) *corespunzînd valorii proprii* $\mu = 1$, *are o bază compusă din funcții nenegative* $x_1(s), \ldots, x_r(s)$ *satisfăcînd următoarele proprietăți:*

1) *Pentru oricare din funcțiile* $x_j(s)$ $(j = 1, \ldots, r)$, *există în* $[0,1]$ *cel puțin un punct în care funcția* x_j *este pozitivă, iar celelalte funcții ale bazei sînt nule;*

2) *Pentru orice punct* $s \in [0,1]$ *există cel puțin o funcție a bazei, pozitivă în acel punct;*

c) *Mulțimea funcțiilor proprii ale ecuației adjuncte*

$$f(s) = \lambda \int_0^1 K(t,s) f(t)\, dt,$$

corespunzînd valorii proprii $\lambda=1$, *are o bază compusă din funcții nenegative* $f_1(s),\ldots,f_r(s)$, *biortogonală cu baza* $x_1(s),\ldots, x_r(s)$ *și satisfăcînd condiția*

$$f_i(s) f_j(s) = 0, \quad (i \neq j;\ 0 \leqslant s \leqslant 1).$$

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Literatura asupra ecuațiilor integrale este foarte bogată. Nu vom cita aici decît cartea lui F. Riesz și S. Nagy [23], unde studiul ecuațiilor integrale apare ca un model pentru capitolele propriu-zise de analiză funcțională. Mai amintim că prima carte asupra ecuațiilor integrale a fost scrisă de matematicianul romîn T. Lalescu.

2. Pentru alte aplicații ale metodei ecuațiilor apropiate, vezi L. V. Kantorovici.

3. Ecuațiile cu operatori complet continui, pozitivi sînt studiate de M. G. Krein și M. A. Rutman [187].

CAPITOLUL XIV

APLICAȚII DIVERSE

Teoria spațiilor vectoriale normate are aplicații numeroase în diferite domenii, ca: ecuații diferențiale, calculul variațiilor, calculul probabilităților, mecanică etc. Noi nu putem cuprinde în acest volum toate aplicațiile din diferite domenii arătate mai sus, deoarece pentru a le prezenta se cere o pregătire specială din disciplinele respective. Ne mulțumim să mai dăm, mai mult ca exemple, cîteva din aplicațiile ce se pot expune fără o pregătire care ne-ar scoate din cadrul acestui volum.

§ 1. Problema momentelor

Problema momentelor în spațiile vectoriale normate se prezintă astfel: fie E un spațiu vectorial normat, $\{x_i\}$ un șir de elemente din acest spațiu și c_i un șir de numere din corpul K.

Se cere să se determine existența unei funcționale $f \in E^*$, astfel ca

$$f(x_i) = c_i, \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

O problemă analogă se poate pune și pentru funcționalele biliniare.

Dacă spațiul E este ordonat, se mai poate cere ca funcționala f să fie pozitivă, $f \in E_+^*$.

Soluția problemei momentelor o dau teoremele de existență pentru funcționale, respectiv, liniare, biliniare, pozitive.

Vom da, ca exemplu, numai soluția acestei probleme în cazul spațiului (C).

Propoziție. *Fie* $\{x_i(t)\}_{1 \leqslant i < \infty}$ *un șir de funcții continue definite pe segmentul* $[0,1]$ *și* $\{c_i\}$ *un șir de numere reale. Condiția necesară și suficientă pentru ca să existe o funcție cu variația mărginită* $\alpha(t)$ *astfel ca var.* $\alpha(t) \leqslant M$ *și*

$$\int_0^1 x_i(t)\, d\alpha(t) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

este ca pentru orice șir finit de funcții $\{x_k(t)\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *inclus în șirul nostru și orice șir finit de numere reale* $\{\lambda_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *să fie verificată inegalitatea*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \leqslant M \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t) \right\| = M \max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i(t) \right|.$$

§ 2. Matrice şi sisteme de ecuaţii cu o infinitate de necunoscute

1. Considerăm sistemul de ecuaţii

$$x^i = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x^k + b_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

şi sistemul omogen corespunzător

$$x^i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x^k\,. \tag{1'}$$

Presupunem că şirul $\{x^i\}$ este un element în spaţiul (l^2), adică satisface condiţia

$$\sum_{i=1} |\, x^i\,|^2 < \infty$$

şi că matricea (a_{ik}) satisface condiţia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_{ik} \right|^2 < \infty\,.$$

Se poate demonstra că operatorul definit de relaţiile

$$y^i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, x^k\,, \qquad T(x) = y = \{\, y^i \,\}$$

este complet continuu în spaţiul (l^2).

Putem aplica atunci sistemului (1) în întregime teoria operatorilor complet continui, teoria ergodică, metoda ecuaţiilor apropiate etc.

Teoria ecuaţiilor apropiate ne dă, de exemplu:

P r o p o z i ţ i a 1. *Dacă* λ *nu este valoare proprie a sistemului* (1) *şi dacă*

$$q = \| V \| \, \| V^{-1} \| \, |\lambda| \, \varepsilon_1 = |\lambda| \, \| V \| \, \| V^{-1} \| \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}^2 \right)^{1/2} < 1,$$

atunci sistemul redus

$$x^i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x^k + b_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

este rezolvabil.

P r o p o z i ţ i a 2. *Dacă sistemul* (2) *este rezolvabil şi* $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^n)$ *este soluţia lui, iar* $(x^1, x^2, \ldots x^n, \ldots)$ *soluţia sistemului* (1), *atunci este valabilă inegalitatea*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x^k - \tilde{x}^k \right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x^{2k} \Bigg)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant (\, |\lambda|\, \varepsilon_1 + \| V \| \, \varepsilon_2) \, (1 + \| V \| \, \| \tilde{V}^{-1} \|) \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k^2} \right)^{1/2},$$

unde

$$\varepsilon_1 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i^2 \right)^{1/2}.$$

P r o p o z i ț i a 3. *Dacă* λ *nu este valoare proprie pentru sistemul* (1) *și este îndeplinită condiția*

$$p' = \varepsilon_1 \mid \lambda \mid (1 + \| \widetilde{V}^{-1} \| \, \| V \|) < 1,$$

atunci λ *nu este valoare proprie nici pentru sistemul* (2), *deci operatorul* V^{-1} *există și*

$$\left\| V^{-1} \right\| \leqslant \frac{1 + |\lambda| \, \| \widetilde{V}^{-1} \| \, \| T \|}{1 - p'},$$

$$\| V^{-1} - (I + \lambda \varphi_0^{-1} \widetilde{V}^{-1} \varphi T) \| \leqslant \frac{p'}{1 - p'} (1 + |\lambda| \, \| \widetilde{V}^{-1} \| \, \| T \|)$$

(*interpretarea spațiilor* E *și* E' *și a transformărilor* φ *și* φ_0^{-1} este evidentă).

2. Dacă presupunem că matricea (a_{ik}) este formată din elemente pozitive, operatorul T este pozitiv în spațiul ordonat (l^2). Teoria operatorilor complet continui și pozitivi ne dă

P r o p o z i ț i a 4. *Dacă există un sistem de indici,* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *astfel încît*

$$a_{p_1 p_2} a_{p_2 p_3} \ldots a_{p_{n-1} p_n} a_{p_n p_1} > 0, \tag{3}$$

atunci sistemul (1′) *are o valoare proprie pozitivă,* λ, *de modul minimal. Acestei valori proprii îi corespunde o soluție*

$$x = (x^1, x^2, \ldots) \text{ cu } x^i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots) \text{ și } \sum_{i=1}^{\infty} x^{i^2} = 1.$$

Invers, dacă nu există nici un sistem de indici pentru care să fie îndeplinită condiția (3), *atunci sistemul* (1′) *nu are valori proprii.*

P r o p o z i ț i a 5. *Presupunem că matricea* (a_{ik}) *mai satisface și următoarea condiție: pentru orice pereche de indici* (p,q) *există un număr* $N(p,q)$, *astfel încît* $n \geqslant N$ *implică* $a_{pq}^{(n)} > 0$ (*unde* $a_{pq}^{(n)}$ *reprezintă elementul determinat de indicii* p *și* q *în iterata* n-*a a matricei*).

Atunci sistemul (1′) *are o singură soluție pozitivă*

$$x = (x^1, x^2, \ldots), \quad (x^i > 0, \ i = 1, 2, \ldots)$$

astfel că

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i^2} = 1.$$

Valoarea proprie corespunzătoare este de modul minimal.

3. Considerăm acum o matrice stochastică finită (a_{ik}), adică o matrice satisfăcînd condițiile

1) $a_{ik} \geqslant 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$,

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Această matrice generează un operator pozitiv în spațiul euclidian n-dimensional. Condiția 2) înseamnă că transformarea corespunzătoare lasă invariant punctul v $(1, 1, \ldots, 1)$.

Aplicînd rezultatele de la capitolul IX, paragraful 4, obținem

P r o p o z i ț i a 6. a) *Mulțimea valorilor proprii de modul 1 ale matricei* (a_{ik}) *coincide cu mulțimea soluțiilor unei ecuații algebrice de forma*

$$(z^{\alpha} - 1)\ (z^{\beta} - 1)\ \ldots\ (z^{\tau} - 1) = 0\,.$$

b) *Mulțimea vectorilor invarianți are o bază* $v_1, \ldots, v_r$, *care satisface următoarele condiții:*

1) *Pentru orice vector al bazei,* v_i $(i = 1,2,\ldots,r)$, *există un indice* p_i, *astfel încît coordonata de ordin* p_i *este pozitivă pentru vectorul* v_i *și nulă pentru ceilalți vectori ai bazei.*

2) *Pentru orice indice* j $(j = 1,2,\ldots,r)$ *există un vector în bază astfel încît coordonata de ordin* j *a lui să fie pozitivă.*

c) *Mulțimea vectorilor invarianți ai matricei transpuse* (a_{ki}) *are o bază* $f_1, \ldots, f_r$, *satisfăcînd următoarea condiție: pentru orice indice* i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, *coordonata de ordin* i *este nenulă cel mult pentru un vector al bazei și, în acest caz, este pozitivă.*

§ 3. Aplicații la mecanica aleatorie

Vom însemna cu Σ mulțimea pozițiilor unei particule materiale mobile într-un fluid, Σ presupus un spațiu metric compact, și prin Q mulțimea drumurilor particulei, adică mulțimea șirurilor

$$t = \{\ldots \xi_{-n}, \ldots, \xi_{-1}, \xi_0\}.$$

Mulțimea Q devine un spațiu metric și compact, dacă definim distanța prin

$$D(t_1, t_2) = \sum_{n=0} r^n D(\xi^1_{-n}, \xi^2_{-n}),$$

unde $D(\xi^1_{-n}, \xi^2_{n})$ este o distanță în Σ și $0 < r < 1$.

Fie $P(t, A)$ probabilitatea ca particula să se găsească în mulțimea A după ce a parcurs drumul t, după o unitate de timp. $P(t, A)$ este presupusă satisfăcînd condițiile P_2, P_3 și condiția

$$P_1' \qquad 0 \leqslant P(t, A) \leqslant P(t, Q) = 1.$$

Fie mai departe $\varphi(t, \xi)$ transformarea care duce de la

$$t = \{\ldots, \xi_{-n}, \ldots, \xi_{-1}, \xi_0\}$$

la

$$t' = \{\ldots, \xi_{-n+1}, \ldots \xi_0, \xi\} = \varphi(t, \xi).$$

Această transformare îndeplinește condițiile 1) și 2) din capitolul XII, paragraful 6.

Deci toate condițiile exemplului de la capitolul XII, paragraful 6, sînt îndeplinite și se poate defini operația T ca în locul citat.

Atunci

$$P^n(t, A) = T\,[P^{n-1}(t, A)]$$

reprezintă probabilitatea ca particula să se găsească în mulțimea A, în n unități de timp după ce a parcurs drumul t.

Ținînd seama de proprietățile operației T, se poate aplica teorema ergodică uniformă.

Obținem

Teoremă. *Dacă* $\lambda_1 = 1 \ldots, \lambda_k$ *sînt valorile proprii de modul* 1 *ale operației* T, *atunci pentru orice întreg pozitiv* n,

$$P^n(t, A) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i^n} P_i(t, A) + S^n(t, A),$$

$$\sup_{A \in \mathcal{P}} \left| \frac{1}{n} \sum_{m=i}^{n} \lambda_i^m P^m(t, A) - P_i(t, A) \right| \leqslant \frac{M}{h},$$

$$\sup |S^n(t, A)| \leqslant \frac{M}{(1+h)^n}$$

REFERINȚE ȘI COMENTARII

1. Problema momentelor este strîns legată de teoria integralei și a ecuațiilor integrale. Ea este studiată de mulți autori, din care citățm: A. N. Ahiezer, M. G. Krein etc.

2. Aplicațiile metodei ecuațiilor apropiate la sistemele infinite de ecuații se găsesc în L. V. Kantorovici [150].

Matricele pozitive și matricele stochastice sînt studiate de M. G. Krein și M. A. Rutman [187].

3. Aplicațiile la mecanica aleatorie constituie o interpretare mecanică a problemei lanțurilor cu legături complete, studiată de C. T. Ionescu Tulcea și G. Marinescu [138] și sînt redate după [198].

BIBLIOGRAFIE

Cărți de analiză funcțională și disciplinele înrudite

1. Ahiezer N. I. i Glazman I. M., *Teoria lineinh operatorov v hilbertovom prostranstve.* Moscova, 1950.
2. Alexandrov P. S., *Kombinatornaia topologhia.* Moscova, 1947.
3. — *Vvedenie v obșciiu teoriiu mnojestv i funkții.* Moscova, 1948.
4. Alexandrov P. S. u. Hopf H., *Topologie.* Berlin, vol. I, 1936.
5. Banach S., *Théorie des opérations linéaires.* Varșovia, 1932.
6. Birkhoff G., *Lattice Theory.* New York, 1948.
7. Bochner S. a. Chandrasekharan K., *Fourier Transforms.* Princeton, 1949.
8. Bourbaki N., *Éléments de mathématiques générales.* Paris, 1938.
9. Ghelfand I. M., *Lekții po lineinoi alghebre.* Moscova, 1951.
10. Ghika Al., *Calcul funcțional și variațional.* Curs litografiat, Facultatea de matematică și fizică, București, 1950.
11. Ghika Al., *Curs de teoria funcțiilor reale.* Curs litografiat, Facultatea de matematică și fizică, București, 1949.
12. Halmos R., *Finite Dimensional Spaces.* Princeton, 1948.
13. Hille E., *Functional Analysis and Semigroups.* New York, 1948.
14. Kantorovici L. V., Vulih B. Z. i Pinsker A. G., *Funkționalnîi analiz v poluuporiadocenîh prostranstvah.* Moscova, 1950.
15. Kuratovski C., *Topologie.* Varșovia, 1933, vol. I; Varșovia-Wroklaw, 1951, vol. II.
16. Kuroș A. G., *Kurs vîsșei alghebrî.* Moscova-Leningrad, 1952.
17. Liusternik L. A. i Sobolev V. I., *Elementî funkționalnogo analiza.* Moscova, 1950.
18. Malțev A. I., *Osnovî lineinoi alghebrî.* Moscova-Leningrad, 1948.
19. Moisil Gr., *Analiză generală.* Curs litografiat, Facultatea de matematică și fizică, București, 1942.
20. Natanson I. P., *Teoria funkții vesșcestvennoi peremennoi.* Moscova, 1950.
21. Neuman J., *Functional Operators.* Princeton, 1950, vol. I, II.
22. Riesz F., *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Paris, 1913.
23. Riesz F. et Nagy B. Sz., *Leçons d'Analyse fonctionnelle.* Budapesta, 1952.
24. Schatten R., *A Theory of Cross-Spaces.* Princeton, 1951.
25. Sierpinski W., *Algèbre des ensembles.* Varșovia-Wroklaw, 1951.

Lucrări asupra spațiilor vectoriale normate

26. Ahiezer N. I. i Klein M. G., *O nekotorîh voprosah teorii momentov.* GONTI, Harkov, 1938.
27. Aizenstadt N. D., *Ob odnom tipe aditivnogo operatora.* Mat. uceonîie zapiski universiteta, 1939, t. 15, p. 95—112.
28. Akilov G. P., *O rasprostranenii lineinh operații.* DAN SSSR, 1947, vol. 57, p. 643—646.
29. — *Neobhodimîe uslovia rasprostranimosti lineinh operații.* DAN SSSR, 1948, vol. 59, p. 417—418.
30. Alaoglu L., *Weak Topologies of Normed Linear Spaces.* Annals of Math., 1940, vol. 41.

31. Alaoglu L. a. Birkhoff G., *General Ergodic Theorems.* Annals of Math., 1940, vol. 41, p. 293.
32. Alexandrov P. S. et Urysohn P. S., *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D).* C. R. Acad. Sci., Paris, 1923, vol. 177, p. 1274.
33. Alexiewicz A., *Linear Operations Among Bounded Measurable Functions.* Annal. Soc. Polon. Math., 1946, vol. 19, p. 140.
34. — *On Sequences of Operations.* Studia Math., 1950, vol. 11, p. 1.
35. Alexiewicz A. a. Orlicz W., *Analytic Operations in Real Banach Spaces.* Studia Math., 1953, t. 142, p. 57—78.
36. Altman M. S., *O biortogonalnîh sistemah.* DAN SSSR, 1949, vol. 67, p. 413.
37. Aoki T., *On the Stability of the Linear Transformation in Banach Space.* Journ. Math. Soc. Japan, 1950, vol. 2, p. 64—66.
38. Arens R. F. a. Kelley J. L., *Characterization of the Space of Continuous Functions Over a Compact Hausdorff Space.* Trans. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 62, p. 499—508.
39. Artemenko A. P., *Obşcii vid lineinogo funkţionala v prostranstve funkţii ogranicenoi variaţii.* Mat. Sbornik, 1939, t. 6 (48), p. 215.
40. — *O pozitivnîh lineinîh funkţionalah v prostranstve pociti periodiceskih funkţii H. Bohra.* Zapiski mat. t-va (4), 1940, vol. 16, p. 111.
41. Ascoli G., *Sugli spazi lineari e le loro varieta lineari.* Annali di Mat., 1932, vol. 10.
42. Atkinson F. V., *Symmetric Linear Operators on a Banach Space.* Monatshefte Math., Wien, 1949, vol. 53, p. 278.
43. — *Normalnaia razreşimosti lineinîh uravnenii v normirovanîh prostranstvah.* Mat. Sbornik, 1951, vol. 28 (70), nr. 1, p. 3.
44. Banach S., *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math., 1922, vol. 3, p. 133.
45. — *Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires.* Bull. Sci. Math., 1926, vol. 50, p. 27.
46. Banach S., *Über homogene Polynome in* (L^2). Studia Math., 1938, vol. 7, p. 36.
47. Banach S. et Steinhaus G., *Sur le principe de la condensation de singularités.* Fund. Math., 1927, vol. 9, p. 50.
48. Banach S. u. Mazur S., *Zur Theorie der linearen Dimension.* Studia Math., 1933, vol. 4, p. 100.
49. Berman D. L., *O nekotorîh lineinîh operaţiah.* DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 249.
50. Berri R., *Islédovanie konusa polojitelnîh elementov v poluuporiadocenom prostranstve.* Mat. Sbornik, 1948, vol. 23, p. 419.
51. Beurling A., *Sur quelques formes positives avec une application à la théorie ergodique.* Acta Math., 1946, vol. 78, p. 319.
52. Birkhoff G., *Integration of Functions With Values in a Banach Space.* Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 38, p. 357.
53. — *The Mean Ergodic Theorem.* Duke Math. Journ., 1939, vol. 5, p. 19.
54. Bochner S., *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.* Fund. Math., 1933, vol. 20, p. 262.
55. — *Finitely Additive Integral.* Annals of Math., 1940, vol. 41, p. 495.
56. — *Integration and Differentiation in Partially Ordered Spaces.* Proc. Nat., 1940, vol. 26, p. 29.
57. Bochner S. a. Philips R. S., *Additive Set Functions and Vector Lattices.* Annals of Math., 1941, vol. 42, p. 316.
58. Bogoliubov N. N. i Krein S. G., *Pro pozitivni liklom neperervni operatori.* J. in-ta matem., AN USSR, 1947, vol. 9, p. 130.
59. Bohnenblust H. F. a. Sobczyk A., *Extensions of Functionals on Complex Linear Spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 91.
60. — *An Axiomatic Characterization of* L_p*-Spaces.* Duke Math. Journ., 1940, vol. 6, p. 627.
61. Bourgin D. G., *Approximate Isometries.* Bull. Amer. Math. Soc., 1946, vol. 52, p. 704.
62. Brodski M. S. i Milman D. P., DAN SSSR, 1948, vol. 59, p. 837.
63. Caratheodory C., *Bemerkungen zum Riesz-Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie.* Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., 1941, vol. 14, p. 351.
64. Clarkson Y. A., *Uniformly Convex Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1936, vol. 40, 316.
65. Cohen L. W., *On the Mean Ergodic Theorem.* Annals of Math., 1940, vol. 41, p. 505.
66. Cronin J., *Branch Points of Solutions of Equations in Banach Space.* Trans. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 59.
67. Day M. M., *Uniform Convexity.* Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 49, p. 745.
68. Ditkin V. A., *Operaţionoe iscilenie.* Uspehi Mat. Nauk, 1947, vol. 2, nr. 6, p. 72.

69. Ditkin V. A., *K teorii differențialnogo iscislenia.* DAN SSSR, 1947, vol. 56, p. 779.
70. — *O polnote sistemî funkții.* DAN SSSR, 1947, vol. 56, p. 899.
71. — *Nekotorîe formulî dlia nekomutativnîh operatorov.* Uspehi Mat. Nauk, 1948, vol. 3, p. 234.
72. Dixmier J., *Sur un théorème de Banach.* Duke Math. Journ., 1948, vol. 15, p. 1057.
73. Dunford N., *Integration in General Analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 37, p. 441; vol. 38, p. 600.
74. — *Integration and Linear Operations.* Trans. Amer. Math. Soc., 1936, vol. 40, p. 474.
75. — *Uniformity in Linear Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 305.
76. — *An Ergodic Theory for n-Parametric Groups.* Proc. Nat. Ac. Sci., 1939, vol. 25, p. 195.
77. — *A Mean Ergodic Theorem.* Duke Math. Journ., 1939, vol. 5, p. 635.
78. — *Spectral Theory.* Bull. Amer. Math., 1943, vol. 49, p. 637.
79. — *Spectral Theory I. Convergence to Projections.* Trans. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 54, p. 185.
80. — *Direct Composition of Banach Spaces.* Bol. Soc. Math. Mexicana, 1946, vol. 3, p. 1.
81. Eberlein W. F., *Weak Compactness in Banach Spaces.* Proc. Nat. Ac. Sci., 1947, vol. 33, p. 51.
82. Eidelheit E., *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen.* Studia Math., 1936, vol. 6, p. 104.
83. Ezrohi I. A., *Obscie formî lineinîh operații v prostranstvah so sceotnîm bazisom.* DAN SSSR, 1948, vol. 59, p. 1537.
84. Fihtenholt G. M. i Kantorovici L. V., *Nekotorîe teoremî o lineinîh funkționalah i operațiah.* DAN SSSR, 1934, vol. 3, p. 307.
85. — *Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées.* Studia Math., 1935, vol. 5, p. 69.
86. Fihtenholt G. M., *O lineinîh funkționalah, neprerîvnîh v obobșcenom smisle.* DAN SSSR, 1936, p. 217.
87. Fréchet M., *Sur les opérations linéaires.* Trans. Amer. Math. Soc., 1904, vol. 5, p. 493; 1905, vol. 6, p. 134.
88. — *Sur quelques points du calcul fonctionnel.* Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906, vol. 22, p. 1.
89. — *La notion de différentielle dans l'analyse générale.* Annales Ec. Norm. Sup., 1925, vol. 42, p. 293.
90. — *Les polynômes abstraits.* Journ. de Math., 1929, vol. 8, p. 71.
91. Freudenthal H., *Über teilweise geordnete Moduln.* Proc. Amsterdam Ac., 1936, vol. 39, p. 641.
92. Gantmaher V. i Șmulian V. L., *O lineinîh prostranstvah, edinicinaia sfera kotorîh slabo kompaktna.* DAN SSSR, 1937, vol. 17, p. 91.
93. — *O slaboi kompaktnosti v prostranstve Banaha.* Mat. Sbornik, 1940, vol. 8 (50), p. 489.
94. Gantmaher V., *Über schwache totalstetige Operatoren.* Mat. Sbornik, 1940, vol. 8 (50), p. 301—308.
95. Gavurin M. K., *Abstraktnîe stepenî riadî.* DAN SSSR, 1940, vol. 29, p. 9.
96. — *Analiticeskie metodî isledovania nelineinîh funkționalnîh preobrazovanii.* Uci. zap. Len. un-ta, seria Mat., 1940, vol. 19, p. 59.
97. Gâteaux R., *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques.* Bull. Soc. Math. France, 1922, vol. 50, pl.
98. — *Fonctions d'une infinité de variables indépendantes.* Bull. Soc. Math. France, 1919, vol. 47, p. 70.
99. Ghelfand I. M., *Sur une lemme de la théorie des espaces linéaires.* Zap. matem. t-va, 1936, vol. 13, p. 35—40.
100. — *K teorii abstraktnîh funkții.* DAN SSSR, 1937, vol. 17, p. 237.
101. — *Operatorî i abstraktnîe funkții.* DAN SSSR, 1937, vol. 17, p. 241.
102. — *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren.* Mat. Sbornik, 1938, vol. 4 (46), p. 235.
103. — *O normirovannîh kolțah.* DAN SSSR, 1939, vol. 23, p. 430.
104. — *Normirovanie kolța.* Mat. Sbornik, 1941, vol. 9, p. 3.
105. Ghelfand I. M. i Kolmogorov A. N., *O kolțah neprerîvnîh funkții na topologhiceskih prostranstvah.* DAN SSSR, 1939, vol. 22, p. 11.
106. Ghelfand I. M., Raikov D. A. i Silov G. E., *Komutativnîe normirovanie kolța.* Uspehi Mat. Nauk, 1946, vol. 1, nr. 2 (12), p. 48.
107. Ghika Al., *Asupra spațiilor Banach reflexive.* Bul. științ. Acad. R.P.R., A. Științe matematice, fizice ..., t. I, nr. 7, iunie 1949, p. 639.
108. — *Asupra spațiilor Banach cu norme derivabile.* Bul. științ. Acad. R.P.R., A. Științe matematice, fizice..., t. I, nr. 7, iunie 1949, p. 645.
109. — *Asupra problemei momentelor.* Bul. științ. Acad. R.P.R., A. Științe matematice, fizice..., t. I, nr. 7, iunie 1949, p. 671.

110. Gohberg I. T., *O lineinîh uravneniah v normirovanîh prostranstvah.* DAN SSSR, 1951, vol. 76, p. 477.
111. — *O lineinîh uravneniah v prostranstve Hilberta.* DAN SSSR, 1951, vol. 76, p. 9.
112. Govurin M., *On the k-Linear Operations in Banach Spaces.* DAN SSSR, 1939, vol. 22, p. 543—547.
113. — *On the Differential and Integral Calculus in Banach Spaces.* DAN SSSR, 1939, vol. 22, p. 548.
114. — *Über die Stieltjessche Integration abstracter Funktionen.* Fund. Math., 1936, vol. 27, p. 254.
115. Graves L. M., *Topics in the Functional Calculus.* Bull. Amer. Math. Soc., 1935, vol. 41, p. 641.
116. — *Implicit Functions and Differential Ecuations in General Analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., 1927, vol. 29, p. 514.
117. — *Riemann Integration and Taylors Theorem in General Analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., 1927, vol. 29, p. 163.
118. Grinblium M. M., *Nekotorîe teoremî o bazise v prostranstve tipa (B).* DAN SSSR, 1941, vol. 31, p. 428.
119. — *Biortogonalnîe sistemî v prostranstve Banaha.* DAN SSSR, 1945, vol. 47, p. 79.
120. — *Ob odnom klase lineinîh prostranstv.* DAN SSSR, 1945, vol. 49, p. 467.
121. — *O moei state „Biortogonalnîe sistemî v prostranstve Banach".* DAN SSSR, 1942, vol. 52, p. 387.
122. — *O teorii biortogonalnîh sistem.* DAN SSSR, 1947, vol. 55, p. 291.
123. — *Operatorniti integral v prostranstve Banach.* DAN SSSR, 1950, vol. 71, p. 5.
124. — *O predstavlenii prostranstva tipa B v vide priamoi sumî podprostranstv.* DAN SSSR, 1950, vol. 70, p. 749.
125. — *Spektralnaia funkţia v prostranstve Banaha.* DAN SSSR, 1950, vol. 70, p. 941.
126. Grosberg I. I., *Pro liniini funkţionali na prostori funkţii ob mîjenoi variaţii.* Kiev, Uceon. zap. ped. in-ta, 1939, vol. 2, p. 17.
127. Hahn H., *Über Folgen linearer Operationen.* Monatshefte Math., Phys., 1922, vol. 32.
128. — *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* Journ. f. Math., 1927, vol. 157, p. 214.
129. Halilov Z. I., *Lineinîe singulearnîe uravnenia v normirovanom kolţe.* DAN SSSR, 1947, vol. 58, p. 1613.
130. — *Lineinîe singulearnîe uravnenia v normirovanom kolţe.* Izvestia Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat., 1949, vol. 13, p. 163.
131. Halmos P. R., *An Ergodic Theorem.* Proc. Nat. Ac. Sci., 1946, vol. 32, p. 156.
132. Hausdorff F., *Zur Theorie der linearen metrischen Räume.* Journ. reine und angew. Math., 1932, vol. 167, p. 294.
133. Helly E., *Über lineare Funktionaloperationen.* Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl., 1912, Abt. II-a, nr. 121, p. 265.
134. Highberg I. E., *Polynomials in Abstract Spaces.* Cal. Inst. of Tech., Thesis, 1936.
135. — *A Note on Abstract Polynomials in Complex Spaces.* Journ. de Math., 1937, vol. 16 (9), p. 307.
136. Hildebrandt T. H. a. Graves L. M., *Implicit Functions ans their Differentials in General Analysis.* Trans. Amer. Math. Soc., 1927, vol. 29, p. 127.
137. — *Über vollstetige lineare Transformationen.* Acta Math., 1928, vol. 51, p. 311.
138. Ionescu Tulcea C. T. et Marinescu G., *Sur certaines chaînes à liaisons complètes.* C. R. Ac. Sci., 1948, vol. 227, p. 667.
139. — *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues.* Annals of Math., 1950, vol. 52, p. 140.
140. Iudin A., *Reşenie dvuh problem teorii poluuporiadocenîh prostranstv.* DAN SSSR, 1939, vol. 23, nr. 6, p. 418.
141. — *Nekotorîe gheometriceskie voprosî teorii lineinîh poluuporiadocenîh prostranstv.* Uceon. zapiski LGU, 1940, vol. 5, p. 64.
142. Izumi Shin-ichi, *Notes on Banach Spaces.* Proc. Ac. Tokio, 1943, vol. 19, p. 99.
143. James R. C., *Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1947, vol. 61, p. 265.
144. — *Bases and Reflexivity of Banach Spaces.* Annals of Math., 1950, vol. 52, p. 518.
145. Kakutani S., *Weak Topology and Regularity of Spaces.* Proc. Imp. Ac. Tokio, 1939, vol. 16, p. 169.
146. — *Weak Topology, Bicompact Set and the Principle of Duality.* Proc. Imp. Ac. Tokio, 1940, vol. 16, p. 63.
147. Kantorovici L. V., *The Method of Successive Aproximations for Functional Equations.* Acta Math., 1939, vol. 71, p. 63.

148. — Kantarovici L. V., *O metode Newtona dlia funkţionalnîh uravnenii*. DAN SSSR, 1948, vol. 59, p. 1237.
149. — *Funkţionalnîi analiz i prikladnaia matematika*. Uspehi Mat. Nauk, 1948, vol. 3, nr. 6, p. 89.
150. — *Funkţionalnîi analiz i prikladnaia matematika*. Vestnik Len. un-ta, 1948, vol. 6, p. 3.
151. — *Prinţip majorant i metod Newtona*. DAN SSSR, 1951, vol. 76, p. 17.
152. — *O poluuporiadocenîh lineinîh prostranstvah i ih primeneniah v teorii lineinîh operaţii*. DAN SSSR, 1935, vol. 4, p. 11.
153. Kantorovici L. V., Vulih B. Z. i Pinsker A. G., *Poluuporiadocenie gruppî i lineinie poluuporiadocenie prostranstva*. Uspehi Mat. Nauk, 1951, vol. 6, p. 31.
154. Karlin S., *Bases in Banach Spaces*. Duke Math. Journ., 1948, vol. 15, p. 971.
155. Katetov M., *O normovanych vektorovych prostorech*. Rozpravy ceske Akad. Tr. II, 1943, vol. 53. p. 447.
156. — *Linear Operators I*. Casopis Mat. Fys. Praha, vol. 75, p. 9.
157. Kerner M., *Die Differentiale in der allgemeinen Analysis*. Annals of Math., 1933, vol. 34, p. 564.
158. — *Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis*. Prace Mat.-Fiz., 1932, vol. 40, p. 47.
159. Klee V. L., *The Support Property of a Convex Set in a Linear Normed Space*. Duke Math. Journ., 1948, vol. 15, p. 767.
160. Kolmogorov A. N., *Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz in Mittel*. Göttinger Nachrichten, 1931, p. 60.
161. — *La transformation de Laplace dans les espaces linéaires*. C. R. Ac. Sci., 1935, vol. 200, p. 1717.
162. Kozlov V. I., *Ob odnom obobşcenii poniatiia bazisa*. DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 643.
163. Krîlov N. i Bogoliubov N., *Naslidki dîi statistiicinoi zminiparametriv vidnosno ergodicinih vlastivostei dinamicinîh nekonservativnîh sistem*. Zapiski Kafedr. mat. fiziki, 1937, vol. 3, p. 154.
164. — *Pro povtoriuvani iteraţii zi zminini parametrami*. Zapiski Kafedr. mat. fiziki, 1937, vol. 3, p. 191.
165. — *Pro deiăki problemi ergodicinoi teorii stohasticinîh sistem*. Zapiski Kafedr. mat. fiziki, 1939, vol. 4, p. 243.
166. Krasnoselski M. A., *Ob odnom prinţipe nepodvijnoi tociki dlia vpolne neprerîvnîh operatov v funkţionalnîh prostranstvah*. DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 13.
167. — *Shodimosti metoda Galerkina dlia nelineinîh uravnenii*. DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 1121.
168. — *Ob odnom topologhiceskom metode v zadace o sobstvenîh funkţionah nelineinîh operatorov*. DAN SSSR, 1950, vol. 74, p. 5.
169. — *Sobstvenie funkţii nelineinîh operatorov, asimptoticeski blizkih lineinîm*. DAN SSSR, 1950, vol. 74, p. 177.
170. — *Operatori s monotonnîmi minorantami*. DAN SSSR, 1951, vol. 76, p. 481.
171. — *Rasceplenie operatorov deistvuiuşcih iz prostranstva L^q v prostranstvo L^p*. DAN SSSR, 1952, vol. 82, p. 335.
172. — *Ob ocenke kolicestva kriticeskih tocek funkţionalov*. Uspehi Mat. Nauk, 1952, vol. 7, p. 157.
173. — *Ob odnom obobşcenii poniatiia bazisa*. DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 643.
174. — *Nekotorie zadaci nelineinogo analiza*. Uspehi Mat. Nauk, 1954, t. 9, nr. 3, p. 57—114.
175. Krein M. G., *Propriétés fondamentales des ensembles coniques normaux dans l'espace de Banach*. DAN SSSR, 1940, vol. 28, p. 13.
176. — *Sur la décomposition minimale d'une fonctionnelle linéaire en composantes positives*. DAN SSSR, 1940, vol. 28, p. 18.
177. — *Pro pozitivni aditivni funkţionali v lineinih normirovanih prostorah*. Sovbşci. Harkovsk. Mat. Obşcest., 1937, vol. 14, p. 227.
178. — *O lineinîh operatorah, ostavleaiuşcih invariantnîm nekotoroe koniceskoe mnojestvo*. DAN SSSR, 1939, vol. 23, nr. 8, p. 749.
179. — *Osnovnie svoistva normalnîh koniceskih mnojestv v prostranstve Banacha*. DAN SSSR, 1949, vol. 28, nr. 1, p. 13.
180. Krein M. G. et Krein S. G., *Sur l'espace des fonctions continues définies sur un bicompact de Hausdorff et ses sous-espaces semiordonnés*. Mat. Sbornik, 1948, vol. 13 (55), p. 1.
181. — *Ob odnoi vnutrennei harakteristike mnojestv vseh neprerîvnîh funkţii, opredeleonîh na hausdorfovom bikompaktnom mnojestve*. DAN SSSR, 1940, vol. 27, nr. 6, p. 427.
182. Krein M. G. i Krasnoselski M. A., *Osnovnie teoremî o rasprostranenii ermitovih operatorov*. Uspehi Mat., 1947, vol. 2, nr. 3, p. 60.

183. Krein M. G. i Krasnoselski M. A., *Usloicivosti indexa neogranicenogo operatora.* Mat. Sbornik, 1952, vol. 30 (72), p. 219.
184. Krein M. G., Krasnoselski M. A. i Milman D. P., *O defektnih cislah lineinh operatorov o banachovom prostranstve i o nekotorh gheometriceskih voprosah.* Sbornik trudov Inst. Mat. AN USSR, 1948, p. 97.
185. Krein M. G. i Liusternik L. A., *Funktionalnîi analiz.* Matematika v SSSR za 30 let, 1917—1947, Moscova, 1948.
186. Krein M. a. Milman D., *On Extreme Points of Regular Convex Sets.* Studia Math., 1940, vol. 9, p. 133.
187. Krein M. G. i Rutman M. A., *Lineinie operatorî, ostavliaiuşcie invarianthm konus v prostranstve Banaha.* Uspehi Mat. Nauk, 1948, vol. 3, nr. 1, p. 3.
188. Kryloff N. et Bogoluboff N., *La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire.* Annals of Math., 1936, vol. 37.
189. Leibenzon Z. L., *Ob otdelenii hiperploskostiu vipuklth mnojestv v lineinth topologhiceskih prostranstvah.* Uspehi Mat., 1952, vol. 7, p. 165.
190. Lewitan B., *Die Verallgemeinerung der Operation der Verschiebung in Zusammenhang mit fastperiodischen Funktionen.* Mat. Sbornik, 1940, vol. 7 (44), p. 449.
191. Liusternik L., *Osnovnie ponialia funkţionalnogo analiza.* Uspehi Mat. Nauk, 1936, vol. 1, p. 77.
192. Lorch E. R., *The Theory of Analytic Functions in Normed Abelian Vector Rings.* Trans. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 54, p. 414.
193. — *On a Calculus of Operators in Reflexive Vector Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 45, p. 217.
194. — *On Certain Implications Which Characterize Hilbert Space.* Annals of Math., 1948, vol. 49, p. 523.
195. Marinescu G., *Sur l'extension des fonctionnelles bilinéaires.* Bull. Math. Soc. Roum. des Sci., 1945—1946, vol. 47, p. 202.
196. — *Extensiunea funcţionalelor biliniare în spaţiile euclidiene generale.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., A. Ştiinţe matematice, fizice..., t. I, nr. 7, iunie 1949, p. 681.
197. — *Aplicaţiile funcţionalelor biliniare la problema momentelor.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., A. Ştiinţe matematice, fizice..., t. I, nr. 9, octombrie 1949, p. 823.
198. — *Operaţii relativ complet continue.* Studii şi cercetări matematice, t. II, nr. 1—2, ianuarie-iunie 1951, p. 107.
199. — *Asupra diferenţialei şi derivatei în spaţiile normate.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe matematice şi fizice, t. VI, nr. 2, 1954, p. 213—219.
200. — *Asupra formulei lui Lagrange în spaţiile Banach.* Rev. Univ. C. I. Parhon şi a Polit. Bucureşti, nr. 4—5, 1954, p. 71—72.
201. Mazur S., *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen.* Studia Math., 1933, vol. 4, p. 70.
202. — *Über schwache Konvergenz in den Räumen (L^p).* Studia Math., 1933, vol. 4, p. 128.
203. Mazur S. a. Orlicz W., *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen.* Studia Math., 1935, vol. 5, p. 50 şi 179.
204. Mc. Shane E. Y., *Linear Functionals on Certain Banach Space.* Proc. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 1, p. 402—408.
205. Michal A. D. a. Clifford A. H., *Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstraits.* C. R. Ac. Sci., 1953, vol. 197, p. 735.
206. Michal A. D. a. Martin R. S., *Some Expansions in Vector Space.* Journ. de Math., 1934, vol. 13 (9), p. 69—91.
207. Morse M. a. Transne W., *Functionals of Bounded Fréchet Variation.* Canad. Journ. of Math., 1949, vol. 1, p. 153.
208. — *Functionals F Bilinear Over the Product $A \times B$ of two p-Normed Vector Spaces.* Annals of Math., 1949, vol. 50, p. 777.
209. Myers S. B., *Normed Lineur Spaces of Continuous Functions.* Bull. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 56, p. 233.
210. — *Banach Spaces of Continuous Functions.* Annals of Math., 1948, vol. 49, p. 132.
211. Nachbin L., *A Characterization of the Normed Vector Ordered Spaces of Continuous Functions Over a Compact Space.* Amer. Journ. of Math., 1949, vol. 71, p. 701.
212. — *A Theorem of the Hahn Banach Type for Linear Transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 1950, vol. 68, p. 28.
213. Nagumo M., *Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen.* Jap. Journ. of Math., 1936, vol. 13, p. 61.
214. Nemiţki V., *Metod nepodvijnth tocek v analize.* Uspehi Mat. Nauk, 1936, vol. 1, p. 141.

215. — Nemiţki V., *Nekotorîe voprosî strukturî spektra nelineinîh vpolne neprerîvnîh operatorov.* DAN SSSR, 1951, vol. 80, p. 161.
216. Nikolski S. M., *Lineinîe uravnenia v lineinîh normirovanîh prostranstvah.* Izvestia Akad. Nauk, seria mat., 1943, vol. 7, nr. 3, p. 147.
217. Obreanu F., *Teorema lui Zorn.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., A. Secţiunea de ştiinţe matematice, fizice..., t. I, nr. 7, 1949, p. 687.
218. Orlicz W., *Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B.* Bull. intern. de l'Acad. Pol. Ser. A., Cracovia, 1932.
219. Pettis B. J., *On Integration in Vector Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 44, p. 277.
220. — *A Proof That Every Uniformly Convex Space is Reflexive.* Duke Math. Journ., 1939, vol. 5, p. 249.
221. Philips R., *On Linear Transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 1940, vol. 48, p. 516.
222. Pinsker A. G., *O normirovanîh k-prostranstvah.* DAN SSSR, 1941, vol. 33, p. 12.
223. Post E. L., *Generalized Differentiation.* Trans. Amer. Math. Soc., 1930, vol. 32, p. 723.
224. Riesz F., *Über lineare Funktionalgleichungen.* Acta Math., 1918, vol. 41, p. 71.
225. — *Sur les opérations fonctionnelles linéaires.* C. R. Ac. Sci., 1909, vol. 149, p. 974; 1910, vol. 150, p. 674.
226. — *Untersuchungen über Systeme integrierbaren Funktionen.* Math. Annalen, 1910, vol. 69, p. 449.
227. — *Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires.* Atti. Congr. Int. dei Mat. (Bologna) (VI), 1928, vol. 3, p. 143.
228. — *La théorie générale des opérations linéaires.* Annals of Math., 1940, vol. 41, p. 174.
229. — *Sur les ensembles compacts des fonctions sommables.* Acta Szeged, 1932—1934, vol. 6, p. 130.
230. — *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires.* Acta Math., 1927, vol. 49, p. 465.
231. Radon J., *Über lineare Funktionaltransformationen und Funktionalgleichungen.* Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., 1919, vol. 128, Abt. II-a, p. 1083.
232. Rios S., *Note of Analytic Operations in Banach Space.* Rev. Math. Hisp.-Amer., 1950, vol. 6 (4), p. 48.
233. Rothe E., *On non-Negative Functional Transformations.* Amer. Journ. of Math., 1944, vol. 56.
234. — *Completely Continuous Scalars and Variational Methods.* Annals of Math., 1948, vol. 49, p. 265.
235. Ruston A. F., *A Short Proof of a Theorem on Reflexive Spaces.* Proc. Cambr. Philos. Soc., 1949, vol. 45, p. 674.
236. Rutman M., *Ob odnom spetialnom klase vpolne neprerîvnîh operatorov.* DAN SSSR, 1938, vol. 18, p. 625.
237. — *Sur les opérateurs totalement continus linéaires laissant invariant un certain cône.* Mat. Sbornik, 1950, vol. 8 (50), nr. 1, p. 77.
238. Schauder J., *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen.* Studia Math., 1930, vol. 2, p. 183.
239. — *Über die Umkehrung linearer stetiger Funktionaloperationen.* Studia Math., 1930, vol. 2, p. 1.
240. — *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen.* Studia Math., 1930, vol. 2, p. 171.
241. Sirvint I. F., *Vîpuklîe mnojestva i lineinîe funkţionalî v abstraktnom prostranstve.* Izvestia Akad. Nauk, seria mat., 1942, vol. 6, p. 143 şi 189.
242. Šmulian V., *O rdzlicinîh topologhiah v prostranstve Banaha.* DAN SSSR, 1939, vol. 23, nr. 6.
243. — *Über lineare topologische Räume.* Mat. Sbornik, 1940, vol. 7, p. 425.
244. Sobczyk A., *On the Extension of Linear Transformations.* Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 55, p. 153.
245. Steen S. W. P., *An Introduction to the Theory of Linear Operators*: (1) *Real Operators.* Proc. Lond. Math., 1936, vol. 41, p. 361.
246. Suchomlinov G. A., *Analytische Funktionale.* Bull. Univ. Moscou ser. Int. Sect. A, 1937, vol. I, fasc. 2.
247. Solehov G. S., *Prilojenie metoda ţepnîh drobei k reşeniiu kvadratnooperatorîh i funkţionalnîh uravnenii.* DAN SSSR, 1952, vol. 82, p. 201.
248. Taylor A. E., *Analytic Functions in General Analysis.* Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1937, vol. 6 (2), p. 277.
249. — *Additions to the Theory of Polynomials in Normed Linear Spaces.* Tohoku Math. Journ., 1938, vol. 44, p. 302.
250. — *Biharmonic Functions in Abstract Spaces.* Amer. Journ. Math., 1938, vol. 60, p. 416.

251. Taylor A. E., *Banach Spaces of Analytic Functions in the Unit Circle.* I. Studia Math., 1950, vol. 11, p. 145.
252. — *Linear Operations Which Depend Analytically Upon a Parameter.* Annals of Math., 1938, vol. 39, p. 574.
253. — *On the Properties of Analytic Functions in Abstract Spaces.* Math. Annalen, 1938, vol. 115, p. 466.
254. — *Analysis in Complex Banach Spaces.* Bull. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 49, p. 652.
255. Ţitlanadze E. S., *K variaţionii teorii odnogo klasa nelineinîh operatorov v prostranstve L^p (q > 1).* DAN SSSR, 1950, vol. 71, p. 441.
256. Vainberg M. M., *O neprerîvnosti nekotorîh operatorov speţialnogo vida.* DAN SSSR, 1950, vol. 73, p. 253.
257. — *O sobstvenîh elementah klasa nelineinîh operatorov.* DAN SSSR, 1950, vol. 75, p. 609.
258. — *O slaboi neprerîvnosti funkţionalov i ih gradientov.* DAN SSSR, 1951, vol. 78, nr. 5.
259. — *O nepodvijnîh napravleniah nekotorîh vpolne neprerîvnîh operatorov.* DAN SSSR, 1952, vol. 83, nr. 6, p. 785.
260. — *O nekotorîh variaţionîh prinţipah v teorii operatornîh uravnenii.* Uspehi Mat. Nauk, 1952, vol. 7, nr. 2 (48), p. 197.
261. — *Nekotorîe voprosî diferenţialnogo analiza v lineinîh prostranstvah.* Uspehi Mat. Nauk, 1952, t. 7, nr. 4, p. 55—102.
262. Vişnevski L. A., *Über Taylorische Entwicklung und über relatives Extremum der Funktionen unendlich vielen unabhängigen Variablen.* Simferopol, Zap. Mat. Kab. Krimsk. un-ta, 1921, vol. 3, p. 161.
263. Vulih B. Z., *O metrizaţii shodimostei v lineinîh prostranstvah.* DAN SSSR, 1939, vol. 23, p. 433.
264. — *O lineinîh prostranstvah s zadanoi shodimostiu* Uci. zap. Len. in-ta, seria mat., 1941, vol. 12, p. 3—29.

TABLA DE MATERII

Pag.

Prefață 5

Capitol introductiv

§ 1. Noțiuni de teoria mulțimilor și structurilor 7
§ 2. Mulțimi ordonate. Teorema lui Zorn 9
§ 3. Structuri algebrice și topologice 9
Referințe și comentarii 10

Capitolul I
Spații vectoriale normate și spații Banach

§ 1. Spații vectoriale 12
§ 2. Spații vectoriale normate 16
§ 3. Spații Banach 25
§ 4. Spații vectoriale normate ordonate 26
§ 5. Latice vectoriale complete 31
§ 6. Produs cartezian și produs tensorial 33
Referințe și comentarii 44

Capitolul II
Operații liniare și multiliniare

§ 1. Operații liniare 45
§ 2. Inversiunea operațiilor liniare 55
§ 3. Criterii de izomorfism algebric și topologic 56
§ 4. Șiruri de operații liniare 59
§ 5. Funcționale liniare pozitive 63
§ 6. Operații liniare cu valori într-o latice vectorială 64
§ 7. Operații multiliniare continue 65
Referințe și comentarii 69

Capitolul III
Prelungirea operațiilor liniare și multiliniare

§ 1. Extensiune minimală 70
§ 2. Prelungirea operațiilor care au contradomeniile în spații cu proprietatea intersecției binare 75

Pag.

§ 3. Prelungirea operațiilor liniare pozitive cu valori într-o latice vectorială completă 82
§ 4. Prelungirea funcționalelor liniare complexe 83
§ 5. Existența funcționalelor liniare continue 85
§ 6. Prelungirea funcționalelor biliniare 94
Referințe și comentarii 97

Capitolul IV
Spațiul conjugat

§ 1. Spațiile operațiilor liniare. Spațiul conjugat 98
§ 2. Produs scalar. Ortogonalitate 101
§ 3. Topologia slabă în spațiul conjugat 103
§ 4. Topologia slabă în spațiile vectoriale normate 104
§ 5. Ordonarea spațiului conjugat 106
Referințe și comentarii 109

Capitolul V
Operația adjunctă

§ 1. Definiția operației adjuncte 110
§ 2. Ecuații normal rezolvabile 111
§ 3. Condiții de izomorfism 115
§ 4. Operatorul conjugat unui operator pozitiv 120
Referințe și comentarii 121

Capitolul VI
Calculul diferențial și integral în spații Banach

§ 1. Funcții de variabilă reală cu valori într-un spațiu vectorial normat . . . 122
§ 2. Integrala Riemann-Stieltjes 126
§ 3. Funcții de o variabilă complexă cu valori într-un spațiu vectorial normat complex 135
§ 4. Diferențiala Gâteaux 140
§ 5. Diferențiala Fréchet 148
§ 6. Diferențiabilitatea în spațiile Banach complexe. Funcții analitice 152
Referințe și comentarii 153

Capitolul VII
Algebre Banach

§ 1. Algebre normate și algebre Banach 154
§ 2. Ecuația rezolvantă 158
§ 3. Algebra Banach a operatorilor definiți pe un spațiu Banach 166
Referințe și comentarii 167

Capitolul VIII
Operații complet continue și relativ complet continue

§ 1. Operații complet continue 168
§ 2. Operatori complet continui 170
§ 3. Algebra Banach a operatorilor complet continui 174
§ 4. Operatori complet continui pozitivi 179
§ 5. Operații relativ complet continue 184
§ 6. Clase speciale de operații relativ complet continue 191
Referințe și comentarii 196

apitolul IX

Teoria ergodică

Pag.

§ 1. Teoreme ergodice în medie 197
§ 2. Teoreme de descompunere ergodică 203
§ 3. Teorema ergodică uniformă 209
§ 4. Alte rezultate 213
Referinţe şi comentarii 215

Capitolul X

Metoda ecuaţiilor apropiate

§ 1. Existenţa soluţiilor apropiate 216
§ 2. Aproximarea soluţiei exacte 224
§ 3. Convergenţa soluţiilor apropiate către soluţia exactă 228
Referinţe şi comentarii 229

Capitolul XI

Spaţii vectoriale normate particulare

§ 1. Spaţii de şiruri 230
§ 2. Spaţiul funcţiilor mărginite şi măsurabile 236
§ 3. Spaţiul funcţiilor continue 239
§ 4. Spaţiile funcţiilor p-sumabile ($p \geqslant 1$) 243
§ 5. Exemplu de spaţiu vectorial normat necomplet 248
§ 6. Exemplu de spaţii Banach care nu satisfac condiţia j 249
§ 7. Ordonarea spaţiilor particulare 249
§ 8. Spaţii Banach de distribuţii 250
Referinţe şi comentarii 252

Capitolul XII

Exemple de funcţionale şi operaţii liniare în diferite spaţii particulare

§ 1. Forma funcţionalelor liniare mărginite în spaţiul (c) 253
§ 2. Forma generală a funcţionalelor liniare mărginite în spaţiile (l^p) ($p \geqslant 1$) . 255
§ 3. Forma generală a funcţionalelor liniare mărginite în spaţiul (C) 257
§ 4. Forma generală a funcţionalelor liniare şi mărginite în spaţiile (L^p) ($p \geqslant 1$). 260
§ 5. Operatori complet continui în spaţiul (C) 265
§ 6. Exemple de operaţii liniare relativ complet continue 267
Referinţe şi comentarii 268

Capitolul XIII

Aplicaţii la teoria ecuaţiilor integrale

§ 1. Ecuaţii de tip Fredholm 270
§ 2. Ecuaţii apropiate 272
§ 3. Ecuaţii cu operatori complet continui pozitivi 275
Referinţe şi comentarii 277

Capitolul XIV

Aplicaţii diverse

§ 1. Problema momentelor 278
§ 2. Matrice şi sisteme de ecuaţii cu o infinitate de necunoscute 279
§ 3. Aplicaţii la mecanica aleatorie 281
Referinţe şi comentarii 282
Bibliografie 283

T. 1026

Dat la cules 20.07.1956. Bun de tipar 17.08.1956. Tiraj 3500. Hîrtie semivelină 65 g.m². Format 16/70 × 100. Coli editoriale 17,3. Coli de tipar 18,5. A. 03453. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 512.94/99. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mici 512.8.

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică nr. 3, sub com. nr. 112, B-dul 6 Martie nr. 29 — București R. P. R.